دفتر فنی **ایلیا**

با بیش از یکهزار عنوان جزوه در کلیه رشته های دانشگاهی

ریاضی I

کد: ۱۴۲۸

کپی و پرینت رنگی لیزری	پروژه و تحقیق
تایپ (جدول، فرمول، نمودار)	ترجمه (تخصصی و ...)
اسکن تا سایز A3	صحافی (فنر، سیمی فلزی، گالینگور)
پرس تا سایز A3	لوازم مهندسی و تحریر
پلات	بانک نرم افزار

شعبه پونک: بلوار اشرفی اصفهانی بالاتر از چهارراه پونک بلوار امام حسن پلاک ۱۲ — ۴۴۴۱۰۱۲۲

شعبه نبرد: نبرد جنوبی – خیابان ده حقی – روبروی دانشگاه آزاد – پاساژ دانشجو – پلاک ۵ — ۳۳۶۹۸۷۲۱

Scanned by CamScanner

(۱)

Subject: ریاضی ۱

Year: Month: Date: (۱)

جلسه اول

یادآوری :

$\sqrt[3]{5}$

$g_3(2) = \sqrt[3]{8} = 2 = 1 + 1 = \frac{6}{3}$

لگاریتم : $\log_a(x) = y \longleftrightarrow a^y = x$ $\quad (x > 0 \,,\, a > 0 \,,\, a \neq 1)$

$\log_2(8) = 3 \quad , \quad \log_2(32) = 5$

عدد نپر : $e = 2{,}71$

قرارداد : $\log_e(x) = \ln(x)$

خواص تابع $\ln(x)$:

① دامنه تابع $\ln(x)$ برابر با $(0, +\infty)$ و برد کل آن $\mathbb{R}$.

② تابع همواره پیوسته و یک‌به‌یک است . $\ln(A) = \ln(B) \longleftrightarrow A = B$

③ $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

④ تابع همواره مشتق‌پذیر است بطوریکه : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

⑤ $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Sunwood

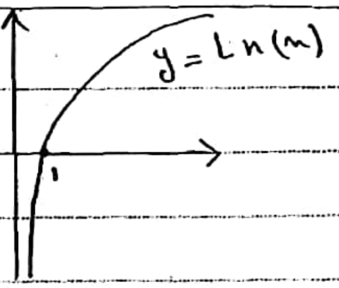
Scanned by CamScanner

(۲)

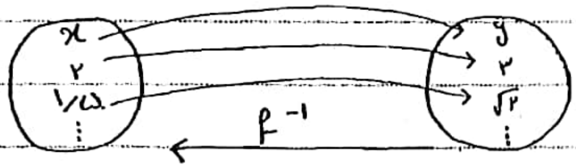
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\ln(e)=1$, $\ln(1)=0$

$\ln(x^n) = n\ln(x)$



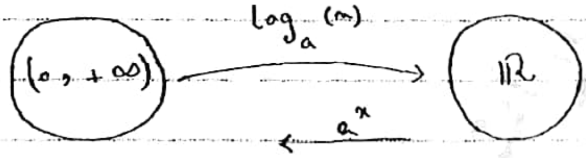
تابع معکوس :



۲ , ۱- , ۱-
اینورس

$f(x)=y$
$f^{-1}(y)=x$

تابع نمایی :



بعنوان مثال معکوس تابع $\log_2(x)$ همان 2^x است.

تابع e^x معکوس تابع $\ln(x)$ است و داریم:

$$\begin{cases} * e^{\ln(A)} = A \\ \ln(e^B) = B \end{cases}$$

مثال: $e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$, $e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$

خواص تابع e^x :

① دامنه تابع R و برد آن $(0,+\infty)$ است.

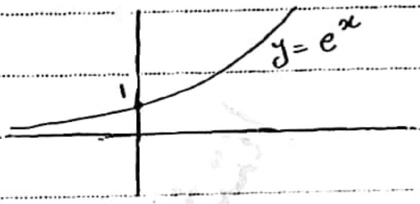
Sunwood

Scanned by CamScanner

② تابع همواره پیوسته است و یک به یک است. $e^{A} = e^{B} \longleftrightarrow A = B$

③ این تابع مشتق‌پذیر است بطوریکه $(e^{x})' = e^{x} \rightarrow (e^{u})' = u' e^{u}$

④ $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$



دیفرانسیل: تغییرات متغیر آن x . مشتق تابع = دیفرانسیل تابع

$d(f(x)) = f'(x) \times \Delta x$

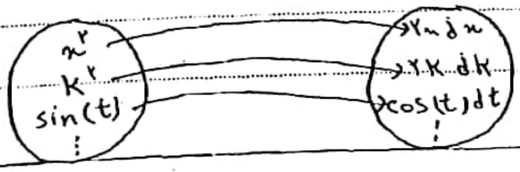
قرارداد: $d(f(x)) = f'(x) \times dx$

مثال: $d(e^{x^2}) = 2x e^{x^2} \times dx$

$d(e^{t^2}) = 2t e^{t^2} \times dt$

$d(k^4) = 4k^3 \, dk$

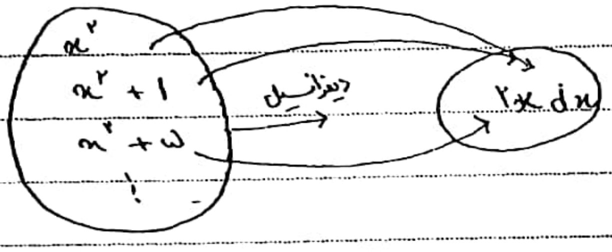
انتگرال نامعین: عکس کار دیفرانسیل است و آن را با نماد $\int$ نشان می‌دهیم.



Scanned by CamScanner

$\int 2x\, dx =$ تابعی که دیفرانسیل آن $2x\,dx$ است

انتگرال ←



$$\int 2x\, dx = x^2 + C$$

☆ قوانین انتگرال گیری :

① $\int 1\, dx = \int dx = x + C$

$\int d\alpha = \alpha + C$

② $(n \neq -1)$, $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال : $\int x^4\, dx = \dfrac{x^5}{5} + C$

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$

③ $\int x^{-1}\, dx = \int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C$

④ $\int e^x\, dx = e^x + C$

⑤ $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$

$\int \sin(x)\, dx = -\cos x + C$

Scanned by CamScanner

Subject ۵

Year. Month. Date. (۳)

$$\int (1+\tan^2(x))\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \int \sec^2(x)\,dx = \tan(x)+C$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad , \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

۶) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arc}\sin(x)+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arc}\tan(x)+C$$

۷) $$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

۸) $$\alpha \in \mathbb{R} \;;\; \int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

الف) $$\int ۳e^x - \frac{۵}{1+x^۲}\,dx = \int ۳e^x\,dx - \int \frac{۵}{1+x^۲}\,dx =$$

$$۳\int e^x\,dx - ۵\int \frac{1}{1+x^۲}\,dx = ۳e^x - ۵\operatorname{Arc}\tan x + C$$

ب) $$\int \frac{۲x^۳+x}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = \int \frac{۲x^۳}{\sqrt[۳]{x}} + \frac{x}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = ۲\int x^{\frac{۸}{۳}}\,dx + \int x^{\frac{۲}{۳}}\,dx = ۲\,\frac{x^{\frac{۸}{۳}+1}}{\frac{۸}{۳}+1} + \frac{x^{\frac{۲}{۳}+1}}{\frac{۲}{۳}+1} + C$$

(with $\frac{۸}{۳} = ۳-\frac{1}{۳}$ and $\frac{۲}{۳} = 1-\frac{1}{۳}$)

نکته:
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

روش های انتگرال گیری :

الف) روش ابتکاری : هدف این روش استفاده از تغییر ظاهری انتگرال (بدون عوض شدن مسئله) آن را تبدیل به فرمول ها نماییم

به عنوان مثال می توان عبارتی را به داخل انتگرال اضافه و کم نماییم . (و یا ضرب و تقسیم بر یک عبارت)

مثال : حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

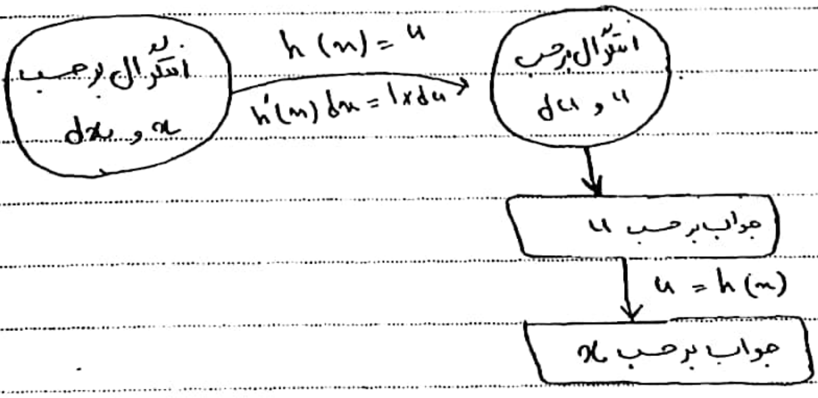
الف) $\int \tan^2(x)\, dx = \int \tan^2(x) + 1 - 1\, dx =$

$\int \tan^2(x) + 1\, dx - \int 1\, dx = \tan(x) - x + C$

ب) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\, dx =$

$\int 1 - \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = x - \mathrm{Arctan}(x) + C$

ب) روش تغییر متغیر :



نکته : هر عبارتی به جای x در فرمول ها (۸ فرمول) قرار گرفت آن را u قرار دهید و از طرفین

Scanned by CamScanner

آنگاه دیفرانسیل گرفته و dx را بر حسب du می‌یابیم:

مثال: $\int e^{x}\,dx = e^{x}+c$

$$\int e^{3x+1}\,dx$$

$$\begin{cases} 3x+1 = u \\ 3\,dx = du \end{cases} \text{دیفرانسیل} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{du}{3}}$$

$$\int e^{3u+1}\,dx = \int e^{u}\,dx = \int e^{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^{u}\,du =$$

$$\frac{1}{3}e^{u}+c = \frac{1}{3}e^{3x+1}+c$$

مثال: الف) $\int 5\cos(2x+1)\,dx =$

$$\begin{cases} 2x+1 = u \\ 2\,dx = du \end{cases} \text{دیفرانسیل} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{du}{2}}$$

$$\int 5\cos(2x+1)\,dx = \int 5\cos(u)\frac{du}{2} = \frac{5}{2}\int \cos u\,du =$$

$$\frac{5}{2}\sin(u)+c = \frac{5}{2}\sin(2x+1)+c$$

ب) $\int \frac{3}{2-5x}\,dx =$

$$\begin{cases} 2-5x = u \\ -5\,dx = du \end{cases} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{du}{-5}}$$

$$\int \frac{3}{2-5x}\,dx = \int \frac{3}{u}\times\frac{du}{-5} = -\frac{3}{5}\int\frac{1}{u}\,du = -\frac{3}{5}\ln(|u|)+c =$$

Sunwood

$$= -\frac{۳}{۵} Ln(|۲-۵x|) + c$$

جلسه دوم

نکته: عبارتی را مساوی با u قرار می‌دهیم که مشتق آن عبارت داخل انتگرال موجود باشد، ضریب عددی مهم نمی‌باشد.

مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int e^{x^۲} ۳x\, dx = \int e^u \times ۳x\, dx = \int e^u \times ۳x \times \frac{du}{۲x} = \frac{۳}{۲}\int e^u du =$$

$$\begin{cases} x^۲ = u \\ ۲x\, dx = du \to dx = \frac{du}{۲x} \end{cases} \quad \frac{۳}{۲} e^u + C = \frac{۳}{۲} e^{x^۲} + C$$

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

الف) $\int \frac{Ln(x)}{x} dx = \int \frac{u}{x} x\, du = \int u\, du = \frac{u^۲}{۲} + c = \frac{(Ln(x))^۲}{۲} + c$

$$\begin{cases} Ln(x) = u \\ \frac{1}{x} \times dx = 1 \times du \to \boxed{dx = x\, du} \end{cases}$$

ب) $\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{u} \times \frac{du}{-\sin x} = -Ln(|u|) + c$

$$\begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x\, dx = du \to dx = \frac{du}{-\sin x} \end{cases} \quad = -Ln(|\cos(x)|) + c$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(9)

Subject:

Year. Month. Date. (5)

ج) روش اول:

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \int \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\begin{cases} 1+e^{-x}=u \\ -e^{-x}dx=du \rightarrow \int \frac{du}{u} \end{cases} \quad = \int 1dx + \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = x + \ln(|1+e^{-x}|)+c$$

روش دوم:

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x}dx = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln(|1+e^x|)+c$$

$$\begin{cases} e^x+1=u \\ e^x dx = du \end{cases}$$

روش سوم:

$$\begin{cases} 1+e^{-x}=u \rightarrow e^{-x}=u-1 \\ -e^{-x}dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{-e^{-x}} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{u} \times \frac{du}{-e^{-x}} = \int \frac{1}{u} \times \frac{1}{-(u-1)}du$$ ادامه‌ی این مسئله به صورت کسر تجزیه‌ای است.

د) روش اول:

$$\int \frac{3x}{1+x^2}dx = \int \frac{3x}{1+u} \times \frac{du}{2x} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+u}du = \frac{3}{2}\int \frac{1}{z}dz = \frac{3}{2}(\ln|1+u|)+c$$

$$\begin{cases} x^2=u \\ 2x\,dx=du \rightarrow \boxed{dx=\frac{du}{2x}} \end{cases} \quad \begin{cases} 1+u=z \\ du=dz \end{cases} \quad = \frac{3}{2}\ln|1+x^2|+c$$

روش دوم:

$$\begin{cases} 1+x^2=u \\ 2x\,dx=du \rightarrow dx=\frac{du}{2x} \end{cases} \quad \int \frac{3x}{u} \times \frac{du}{2x} = \frac{3}{2}\ln(|u|)+c$$

$$= \frac{3}{2}\ln(|1+x^2|)+c$$

$$(\sec(x))' = \sec x \times \tan x$$

ه) $$\int \sec x\,dx = \int \sec x \times \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\tan x+\sec x}dx$$

$$\begin{cases} \tan x+\sec x=u \\ (\sec^2 x+\sec x\tan x)dx=du \end{cases} \quad = \int \frac{du}{u} = \ln(|u|)+c = \ln(|\sec(x)+\tan(x)|)+c$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

ج) روش جزء به جزء: با استفاده از روش جزء به جزء می‌توان انتگرال هایی به صورت حاصلضرب

دو تابع را بدست آورد به ویژه که یکی از توابع موجود در انتگرال به صورت زیر باشد.

سینوسی، کسینوسی، e^x، $\ln(x)$، خانواده Arc ها و یا x^n $(n \in N)$

در این روش قسمتی از انتگرال را مساوی با u در نظر گرفته و سایر عبارت به همراه dx را مساوی با dv

(دیفرانسیل تابعی مانند v) را آنگاه داریم: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

مثال: $\int x e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

$$\begin{cases} x = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \\ e^x dx = dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} \end{cases} \begin{cases} dx = du \\ e^x = v \end{cases}$$

نکته: (۱) همواره $e^x dx$ را dv در نظر می‌گیریم.

(۲) هرگاه $\ln(x)$ یا Arc در انتگرال باشد آنرا u قرار می‌دهیم.

(۳) هرگاه x^n $(n \in N)$ و $\ln(x)$ یا Arc نداشته باشیم! آنگاه

x^n را مساوی u قرار دهید.

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید:

الف) $\int x^2 \cos(x)\, dx =$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۱۱)

Subject: ... Year: ... Month: ۹ Date: ۱۷ (۹)

مشتق	انتگرال
$f(x)$	$g(x)$
$f'(x)$	$h(x)$
⋮	⋮

(جهت‌ها: $+$، $-$، $\pm\int$)

مشتق	انتگرال
x^2	$\cos(x)$
$2x$	$\sin(x)$
2	$-\cos(x)$
0	$-\sin(x)$

(جهت‌ها: $+$، $-$، $+$، $-\int$)

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin x + 2x\cos(x) - 2\sin x - \underbrace{\int 0 \times \sin(x)\,dx}_{0}$$

$$= \boxed{x^2\sin x + 2x\cos(x) - 2\sin x + C}$$

ب) $\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x) \times 1\,dx$

مشتق	انتگرال
$\ln(x)$	1
$\frac{1}{x}$	x

(جهت‌ها: $+$، $-\int$)

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} \times x\,dx =$$

$$x\ln(x) - x + C$$

روش غیر جدولی:
$\begin{cases} \ln(x) = u \\ 1\,dx = dv \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x}\,dx = du \\ x = v \end{cases}$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx$$

ج) $\int x \operatorname{Arctan} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan} x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x^2}$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{Arctan} x) + C$$

مشتق	انتگرال
$\operatorname{Arctan} x$	x
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{x^2}{2}$

(جهت‌ها: $+$، $-\int$)

Sunwood

Scanned by CamScanner

$(\sec x)' = \sec x \cdot tg\, x$

(۱۲)

$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

Subject: .... Year........ Month........ Date........ ( )

$\begin{cases} \text{Arc}\tan x = u \\ x\, dx = dv \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{1+x^2} dx = du \\ \frac{x^2}{2} = v \end{cases}$

$\int x \,\text{Arc}\tan x\, dx = \frac{x^2}{2} \text{Arc}\tan x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x^2} dx$

ز) $\int \text{Arc}\tan x\, dx = x\,\text{Arc}\tan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$

مشتق	انتگرال
$\text{Arc}\tan x$	1 (+)
$\frac{1}{1+x^2}$	x (−)

$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{u} \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} Ln(u) + C = \frac{1}{2} Ln(1+x^2) + C$

$\begin{cases} 1+x^2 = u \\ 2x\, dx = du \end{cases} \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

و) $\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x$

مشتق	انتگرال
$\cos x$	e^x (+)
$-\sin x$	e^x (−)

$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin x}{2} + C$

مشتق	انتگرال
$\sin x$	e^x (+)
$\cos x$	e^x (−)

$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$

د) روش تغییر متغیر مثلثاتی: هرگاه در انتگرالی یکی از عبارت‌های زیر موجود باشد از

این روش استفاده می‌شود:

$(\text{عدد})^2 + (x \text{ تابع برحسب})^2$

یا

$(\text{عدد})^2 - (x \text{ تابع برحسب})^2$

یا

$(\text{تابع})^2 - (\text{عدد})^2$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۱۳

Subject: ......

Year ...... Month ...... Date ...... (۷)

به عنوان مثال هرگاه در انتگرال عامل $a^2 + x^2$ یا $4 - (x+1)^2$ یا $\cos^2(x) - 9$

موجود باشد آنگاه از این روش استفاده می‌شود.

① $a^2 + u^2 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} u = a\tan(\theta) \qquad (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$

② $a^2 - u^2 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} u = a\sin(\theta) \qquad (-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$

③ $u^2 - a^2 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} u = a\sec(\theta) \qquad (0 < \theta < \pi)$

مثال: حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}\, dx \qquad 3 + x^2 = (\underbrace{\sqrt{3}}_{a})^2 + (\underbrace{x}_{u})^2$

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\tan\theta \longrightarrow \tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{3}} \longrightarrow \boxed{\theta = Arc\tan(\frac{x}{\sqrt{3}})} \\ dx = \sqrt{3}(1+\tan^2(\theta))\, d\theta \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{3+(\sqrt{3}\tan\theta)^2}} \sqrt{3}(1+\tan^2(\theta))\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{3(1+\tan^2(\theta))}} \times \sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{3}\sec\theta} \times \sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \ln(|\sec\theta + \tan\theta|) + C = \ln(|\sec(Arc\tan(\frac{x}{\sqrt{3}})) + \frac{x}{\sqrt{3}}|) + C$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۱۴) Subject: جلسه سوم

Year. ______ Month. ______ Date. ______ ( )

ب) $\int x\sqrt{۴-x^۲}\,dx = \int ۲\sin\theta \times \sqrt{۴-(۲\sin\theta)^۲} \times ۲\cos(\theta)\,d\theta = \overset{\times}{\longrightarrow}$

$۴-x^۲=(۲)^۲-(x)^۲$

$\begin{cases} x=۲\sin\theta \\ dx=۲\cos(\theta)\,d\theta \end{cases} \xrightarrow{(-\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲})} \sin(\theta)=\frac{x}{۲} \longrightarrow \boxed{\theta = \text{Arc}\sin\frac{x}{۲}}$

$\overset{\times}{\longrightarrow} \int ۲\sin(\theta)\times ۲\,|\cos(\theta)|\times ۲\cos(\theta)\,d\theta \xRightarrow{-\frac{\pi}{۲}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{۲}}$

$= ۸\int \sin(\theta)\cos^۲(\theta)\,d\theta = ۸\int \sin\theta \times z^۲ \times \frac{dz}{-\sin\theta} = -\frac{۸}{۳}z^۳+C$

$= -\frac{۸}{۳}\cos^۳(\theta)+C = -\frac{۸}{۳}\cos^۳(\text{Arc}\sin(\frac{x}{۲}))+C$

$\begin{cases} \cos(\theta)=z \\ -\sin\theta\,d\theta=dz \end{cases} \longrightarrow d\theta=\frac{dz}{-\sin\theta}$

ج) $\int e^x\sqrt{۳-e^{۲x}}\,dx =$

$۳-e^{۲x}=(\sqrt{۳})^۲-(e^x)^۲$ $\quad\begin{cases} e^x=\sqrt{۳}\sin\theta \\ e^x dx=\sqrt{۳}\cos\theta\,d\theta \end{cases}$

$\int\sqrt{۳-(\sqrt{۳}\sin\theta)^۲}\times\sqrt{۳}\cos\theta\,d\theta = \sqrt{۳(۱+\cos^۲\theta)}$

Sunwood

Scanned by CamScanner

$\int \frac{u'}{u} du = \ln(|u|) + c$

(۱۵)

Subject:

Year: Month: Date: (۸)

$a^2 + u^2 \rightarrow u = a\tan(\theta)$

$(۲)\ \int \frac{1}{3+(2x-1)^2} dx = \begin{cases} 2x-1 = \sqrt{3}\tan(\theta) \rightarrow \tan(\theta) = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ 2dx = \sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta \rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{2} d\theta \end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = \mathrm{Arc}\tan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$\int \frac{1}{\underbrace{3+3\tan^2\theta}_{3\sec^2\theta}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}\int 1 d\theta = \frac{\sqrt{3}}{6}\theta + c =$

$\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$

روش تجزیه کسرها : هدف این روش محاسبه انتگرال های به صورت انتگرال

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ بطوریکه $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله ای بوده و درجه $p(x)$ کمتر از $q(x)$ باشد

(اگر درجه $p(x)$ برابر و یا بزرگتر باشد آنگاه در پایان فصل توضیح داده می شود.)

ابتدا مخرج کسر ($q(x)$) را به حاصل های از درجه یک و یا دو تجزیه نموده و سپس بصورت

های زیر عمل می کنیم.

الف) اگر $q(x) = (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_k)$ باشد آنگاه داریم:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \frac{A_3}{(x-a_3)} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a_k)}$$

(توجه شود درجه صورت یک واحد کمتر از مخرج است.)

برای یافتن ضرایب A_i مجهول کافی است از طرف راست تساوی مخرج مشترک گرفته و سپس

Sunwood

Scanned by CamScanner

(14)

Subject: ....
Year. .... Month. .... Date. .... ( )

صورت کسر حاصل را با $P(x)$ مساوی قرار دهیم و با کمک دو روش کلاسیک و روش

جایگزینی عدد به جای x مقادیر مجهول A_i را بدست آورید.

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$ را بیابید.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\Longrightarrow$$

یا با دستگاه دو معادله دو مجهول یا قرار دادن ریشه $2x+1=A(x-3)+B(x-2)$

$$\boxed{x=3}\longrightarrow\boxed{7=B}$$

$$x=2\longrightarrow 5=-A\longrightarrow\boxed{A=-5}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx=\int\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\,dx=-5\int\frac{1}{x-2}\,dx+7\int\frac{1}{x-3}\,dx$$

$$=-5\ln(|x-2|)+7\ln(|x-3|)+C$$

Scanned by CamScanner

ب) اگر حامل $\frac{1}{(x-a)^k}$ در تجزیه مخرج باشد آنگاه متناظر با این عامل داریم:

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{k-2}}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^1}$$

مثال - کسر زیر را تجزیه نمایید.

$$\frac{2-3x}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^1}$$

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$$

$$\frac{2-3x}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^1}=\frac{A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$\Longrightarrow 2-3x=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$$

$$x=0\longrightarrow \boxed{2=A}$$

$$x=1\longrightarrow \boxed{-1=B}$$

$$x=-1\longrightarrow 5=8+1+2C\longrightarrow C=-2$$

انتخاب به دلخواه

$$\frac{2-3x}{x^3-2x^2+x}=\frac{2}{x}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-2}{(x-1)}$$

ج) اگر $q(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdots(a_kx^2+b_kx+c_k)$ باشد آنگاه:

$$\frac{P(x)}{q(x)}=\frac{A_1+B_1x}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2+B_2x}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{A_k+B_kx}{a_kx^2+b_kx+c_k}$$

Scanned by CamScanner

Subject: ۱۸

Year........ Month........ Date........( )

د) اگر عامل $(ax^2+bx+c)^k$ در تجزیه مخرج باشد آنگاه نظیر آن داریم:

$$\frac{A_1 B_1 x}{(ax^2+bx+c)^k}+\frac{A_2 B_2 x}{(ax^2+bx+c)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k+B_k x}{(ax^2+bx-c)^1}$$

مثال: صرفاً صورت تجزیه کسر زیر را بنویسید (بدون محاسبه ضرایب). $x^3 = x\times x\times x$

$$\frac{3x-1}{x^3(x^2+1)^2(x-4)}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{A_4+A_5 x}{(x^2+1)^2}+\frac{A_6+A_7 x}{x^2+1}+\frac{A_8}{x-4}$$

نکته: در روش تجزیه کسرهای $\frac{P(x)}{q(x)}$ زمانی که درجه $P(x)$ بزرگتر یا مساوی با درجه $q(x)$ باشد آنگاه با کمک تقسیم بصورت زیر داریم:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & q(x) \\ \vdots & h(x) \\ \hline r(x) & \end{array}$$

(درجه $r(x)$ کمتر از $q(x)$ است.)

$$\frac{P(x)}{q(x)}=\frac{h(x)\times q(x)+r(x)}{q(x)}=h(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

$$\int\frac{P(x)}{q(x)}dx=\int h(x)\,dx+\int\frac{r(x)}{q(x)}dx$$

Scanned by CamScanner

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\,dx$ را بیابید.

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2-4 \\ \hline x^3-4x & x \\ \hline 4x+1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\,dx = \int x + \frac{4x+1}{x^2-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{4x+1}{x^2-4}\,dx$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2) \Longrightarrow \frac{4x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$4x+1 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x=2 \Longrightarrow 9 = 4A \longrightarrow \boxed{A=\frac{9}{4}} \quad , \quad x=-2 \Longrightarrow -7 = -4B \longrightarrow \boxed{B=\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \frac{4x+1}{x^2-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{9}{4}}{x-2} + \frac{\frac{7}{4}}{x+2}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}\ln(|x-2|) + \frac{7}{4}\ln(|x+2|) + C$$

نکته: هرگاه $x=a$ ریشه معادله $P(x)=0$ باشد آنگاه $P(x)$ بر $(x-a)$ قابل تقسیم است و این اساس تجزیه عبارت های درجه ۳ و بالاتر است.

مثال: ریشه های $x^3-2x-1=0$ را بیابید.

چون $x=-1$ ریشه است لذا معادله بر $(x-(-1))$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x-1 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2-x-1 \\ \hline -x^2-2x-1 & \\ -x^2-x & \\ \hline -x-1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3-2x-1 = (x^2-x-1)(x+1)$$

Sunwgod

Scanned by CamScanner

جلسه چهارم

نکته: توجه شود اعداد ۱ و ۱- و $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ معمولاً ریشه می‌باشند (در حقیقت ریشه‌ی یک معادله‌ی درجه ۳ و یا بالاتر را حدس می‌زنیم.)

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{2-5x}{x^3+2x-3}dx$ را بدست آورید. چون $x=1$ ریشه‌ی مثبت است لذا بر $(x-1)$ قابل تقسیم است.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+2x-3 & x-1 \\ \hline
-x^3+x^2 & x^2+x+3 \\
x^2+2x-3 & \\
-x^2+x & \\
3x-3 & \\
-3x+3 & \\
0 &
\end{array}
$$

تجزیه با اتحادها و دسته بندی

$$x^3+2x-3 = x^3+2x-2-1$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)$$
$$(x-1)(x^2+x+1+2)$$

$$\frac{2-5x}{x^3+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B+Cx}{x^2+x+3} = \frac{A(x^2+x+3)+(B+Cx)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+3)}$$

$$2-5x = A(x^2+x+3)+(B+Cx)(x-1)$$

دلخواه $x=1 \longrightarrow -3=5A \longrightarrow A=-\frac{3}{5}$

$x=0 \longrightarrow 2=-\frac{9}{5}-B \longrightarrow B=-\frac{19}{5}$

$x=-1 \longrightarrow 7=-\frac{9}{5}+\left(-\frac{19}{5}-C\right)(-2) \longrightarrow C=\frac{83}{10}$

$$\int \frac{2-5x}{x^3+2x-3}dx = \int \frac{-\frac{3}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{19}{5}+\frac{83}{10}x}{x^2+x+3}dx$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۲۱

Year .... Month .... Date .... (۱۱)

تمرین

$$\int \frac{x^2+1}{-x^3+x^2-2x+2}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ۲۲

Year......... Month......... Date......... ( )

انتگرال های به فرم $\int \frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ (توجه $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$) :

در این انتگرال ها با توجه به مشخص Δ مخرج صورت های زیر عمل می شود.

۱) اگر $\Delta>0$ باشد می توان مخرج را تجزیه نمود و از روش تجزیه کسرها می توان ادامه داد.

۲) اگر $\Delta=0$ باشد آنگاه: $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ ← ادامه با تغییر متغیر $u=x-x_0$

قابل محاسبه است.

۳) نکته: هرگاه عبارتی درجه ۲ و با $\Delta\neq0$ موجود باشد آنگاه با کمک روش مربع کامل آن را تجزیه می نماییم. توجه شود در روش مربع کامل ضریب x^2 باید ۱ باشد آنگاه مانند زیر عمل می نماییم.

اگر $\Delta<0$ باشد آنگاه مخرج کسر را با روش مربع کامل بصورت A^2+u^2 تبدیل نموده و سپس با روش مثلثاتی ادامه می دهیم.

روش مربع کامل:

$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$

$=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۲۳

Month. Date. ۱۲

مثال - الف) $\int \frac{3}{x^2-x-2}$ } $\xrightarrow{2\times 1}$ $(x-2)(x+1)$

$1-4(-2)= \quad \Delta > 0$

$$\frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)\ (x+1)}$$

$Ax + A + Bx - 2B = 3 \longrightarrow A - 2B$

$x = -1 \longrightarrow 3 = -3B \longrightarrow B = -1$

$x = 2 \longrightarrow 3 = 3A \longrightarrow A = 1$

$$\int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx = \ln|x-2| - \ln|x+1|$$

ب) $\int \frac{\frac{2}{3}}{2x^2 - 3x + \frac{9}{8}}$ $\quad 9 - 4\times 2\times \frac{9}{8} = 0 \longrightarrow \Delta = 0$

$2(x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}) \quad 2(x-\frac{3}{4})^2$

$$\int \frac{\frac{2}{3}}{2x^2 - 3x + \frac{9}{8}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{2(x-\frac{3}{4})^2}dx$$ } $x - \frac{3}{4} = u$

ادامه تمرین

ج) $\int \frac{2}{5x^2+x+1}\,dx \qquad \Delta=-19<0$

$5x^2+x+1 = 5\left(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\right) =$

$5\left(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{10}\right)^2-\left(\frac{1}{1}\right)^2\right)$

$5\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{5}-\frac{1}{100}\right) = 5\left(\left(x+\frac{1}{10}\right)^2+\frac{19}{100}\right)$

$\left\{ x+\frac{1}{10} = \frac{\sqrt{19}}{10}\tan\theta \right.$

انتگرال های به فرم : $\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx$

در این انتگرال ها ابتدا مشتق مخرج را در صورت کد ظاهر نموده و پس انتگرال به صورت مجموع در انتگرال جدا

می شود به گونه ای که یکی از انتگرال صاب صورت log و دیگری مانند حالت قبل (عدد تقسیم بر درجه ۲) تبدیل می گردد.

مثال ـ حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

الف) $\int \frac{2-3x}{x^2-5x+6}\,dx \Rightarrow \frac{-3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x^2-5x+6} =$

$f' \rightarrow 2x-5$

$\frac{-\frac{3}{2}\left(2x-\frac{4}{3}\right)}{x^2-5x+6} = \frac{-\frac{3}{2}\left(2x-5+5-\frac{4}{3}\right)}{x^2-5x+6} = \frac{-\frac{3}{2}\left((2x-5)+\frac{11}{3}\right)}{x^2-5x+6} = \rightarrow$

$\int \frac{-\frac{3}{2}\left((2x-5)+\frac{11}{3}\right)}{x^2-5x+6}\,dx$

Scanned by CamScanner

$$-\frac{3}{2}\left(\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx + \int \frac{\frac{11}{3}}{x^2-5x+6}\,dx\right) =$$

$$-\frac{3}{2}\left(\ln\left|x^2-5x+6\right| + \frac{11}{3}\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx\right) =$$ → روش قبل

ب) $$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx \Rightarrow \frac{-(x-1)}{x^2+x+1} = \frac{-\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2+x+1} = \frac{-\frac{1}{2}\left((2x+1)-3\right)}{x^2+x+1} =$$

($x^2+x+1 \rightarrow 2x+1$)

$$-\frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{-3\,dx}{x^2+x+1}\right) =$$

$1-4=-3<0$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + (-3)\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$ → از اینجا به بعد با تغییر متغیر مثلثاتی حل می‌شود.

انتگرال از توابع رادیکالی (اصم) 8

هرگاه در انتگرالی رادیکال موجود باشد آنگاه باید به نوعی رادیکال را از بین ببریم. برای این منظور کافی است عبارت زیر رادیکال را مساوی با t به توان ریشه رادیکال در نظر بگیریم.

نکته: توجه هرگاه در انتگرالی ۲ یا چند رادیکال با فرجه های مختلف موجود باشد آنگاه با این شرط که عبارت زیر تمامی رادیکال ها با هم یکی باشند آنگاه عبارت زیر رادیکال مساوی با t به توان ک.م.م

فرجه ها در تغییر متغیر میگیریم.

مثال: الف) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+3}}\,dx$

$2x+3 = u^3 \longrightarrow 2x = u^3 - 3 \longrightarrow x = \frac{u^3-3}{2}$

$2\,dx = 3u^2\,du \longrightarrow dx = \frac{3u^2}{2}\,du$

$\frac{1}{2}\int \frac{u^3-3}{u} \times \frac{3}{2}u^2\,du = \frac{3}{4}\int \frac{u^5-3u^2}{u}\,du = \frac{3}{4}\int u^4 - 3u\,du =$

$\frac{3}{4}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{3u^2}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{(2x+3)^2}{5} - \frac{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}{2}\right) + C$

ب) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int u^2 \times 2u\,du \times (2)^2 = \int 8u^3\,du$

$\frac{x-1}{x+1} = u^2 \qquad x-1 = u^2x + u^2$

$x - u^2(x) = u^2+1$

$x(1-u^2) = u^2+1$

$x = \frac{u^2+1}{1-u^2}$

$\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\,dx = 2u\,du$

$dx = 2u\,du$

$\frac{2}{(x+1)^2}\,dx = 2u\,du$

$dx = u(x+1)^2\,du$

$8\frac{u^4}{4} = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + C$

Scanned by CamScanner

~~* چون عبارت زیر رادیکال عدد یکسانی است از این روش برای حل این انتگرال استفاده کنیم~~

ج) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}\,dx = \int \frac{u^2}{u^3+2} \times 6u^5\,du \xrightarrow{*}$ جلسه پنجم.

$\begin{cases} x+1 = u^6 \\ dx = 6u^5\,du \end{cases}$

$\xrightarrow{*} 6\int \frac{u^7}{u^3+2}\,du = 6\int u^4 - 2u + \frac{4u}{u^3+2}\,du =$

$6\left(\frac{u^5}{5} - u^2 + \int \frac{4u}{u^3+2}\,du\right)$

ادامه کسر را خودمان حل کنیم.

$u^7 \;|\; u^3+2$
$-(u^7+2u^4) \qquad u^4-2u$
$-2u^4$
$-(-2u^4-4u)$
$4u$

راهنمایی: $u^3+2 = u^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = (u+\sqrt[3]{2})(u^2 - \sqrt[3]{2}\,u + \sqrt[3]{4})$

$\frac{4u}{u^3+2} = \frac{A}{u+\sqrt[3]{2}} + \frac{B+Cu}{u^2-\sqrt[3]{2}\,u+\sqrt[3]{4}}$

انتگرال های کسری که در داخل آن ها فقط توابع $\sin(x)$ و $\cos(x)$ باشد:

در این انتگرال ها از تغییر متغیر $\tan(\frac{x}{2}) = u$ استفاده می‌شود. می دانیم: $\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\tan(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$

$\begin{cases} ① \; \boxed{\tan(\frac{x}{2}) = u} \\ \frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))\,dx = du \end{cases}$

② $\boxed{dx = \frac{2\,du}{1+u^2}}$

③ $\boxed{\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}}$

④ $\boxed{\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$

⑤ $\boxed{\tan(x) = \frac{2u}{1-u^2}}$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: (۲۸)

Year...... Month...... Date...... ( )

مثال ـ حاصل انتگرال $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)+1}$ بدست آورید.

$$\int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}+1} \times \frac{2du}{1+u} = \int \frac{1-u^2}{2u+2} \times \frac{2\,du}{1+u^2} = \int \frac{(1-u)(1+u)\times 2}{2(1+u)(1+u^2)}\,du =$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{1+u^2}\,du - \int \frac{u}{1+u^2}\,du = \operatorname{Arctan}(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + c$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + c$$

$\frac{1}{2}$ tan و Arctan عمل یکدیگر را خنثی می‌کنند

انتگرال از توان های توابع مثلثاتی:

الف) $\int \sin^n(x)\,dx$ ($\int \cos^n(x)\,dx$)

۱ـ می‌دانیم هرگاه توان انتگرال سینوسی یا کسینوسی زوج باشد آنرا بصورت $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ توانی از عدد ۲ نوشته سپس از فرمول های (طلایی) استفاده می‌کنیم. $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

مثال ـ حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

الف) $\int \sin^4(t)\,dt = \int (\sin^2(t))^2\,dt = \int \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 dt =$

$$\frac{1}{4}\int (1-\cos(2t))^2\,dt = \frac{1}{4}\int 1-2\cos(2t)+\boxed{\cos^2(2t)}\,dt =$$

$$\cos^2(2t) = \frac{1+\cos(4t)}{2}$$

$$\frac{1}{4}\left(t - 2\times\frac{1}{2}\sin 2t\right) + \frac{1}{2}\int 1+\cos(4t)\,dt\Big) = \frac{1}{4}\left(t-\sin(2t) + \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\sin(4t)\right)\right) + C$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۲۹)

Month. Date. (۱۵

ب) $\int \cos^6(3\alpha)\,d\alpha = \int \left((\cos^2(3\alpha))\right)^3 d\alpha = \int \left(\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\right)^3 d\alpha =$

$\frac{1}{8}\int 1 + 3\cos(6\alpha) + 3\cos^2(6\alpha) + \cos^3(6\alpha)\,d\alpha$ ادامه تمرین

۲ـ وقتی n فرد است : در انتگرال $\int \sin^n(x)\,dx$ و ($\int \cos^n(x)\,dx$) بطوریکه n فرد است ابتدا از یک $\sin(x)$ یا ($\cos(x)$) فاکتور گرفته (آن را کنار گذاشته) و آنگاه توان زوج باقیمانده را با کمک رابطه $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ یا ($\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$) برحسب $\cos(x)$ تبدیل می‌نماییم. با فرض متغیر $\cos(x) = u$ یا ($\sin(x) = u$) انتگرال قابل محاسبه می‌باشد.

مثال ـ حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

الف) $\int \cos^7(x)\,dx$

ب) $\int \sin^5(\alpha)\,d\alpha$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: (۳۵)

Year. ______ Month. ______ Date. ______ ( )

$$\begin{cases} \sin(x) = u \\ \cos(x)\,dx = du \end{cases}$$

$$\int \cos(x)\,(\cos^{6}(x))\,dx = \int \cos(x)(\cos^{2}(x))^{3}\,dx = \int \cos(x)(1-\sin^{2}(x))^{3}\,dx =$$

$$\int (1-u^{2})^{3}\,du = \int 1 - 3u^{2} + 3u^{4} - u^{6}\,du = u - u^{3} + \frac{3u^{5}}{5} - \frac{u^{7}}{7} + c$$

$$= \sin(x) - \sin^{3}(x) + \frac{3\sin^{5}(x)}{5} - \frac{\sin^{7}(x)}{7} + c$$

ب) انتگرال توان‌های $\tan(x)$ و $\cot(x)$:

در انتگرال عدد $\int \tan^{n}(x)\,dx$ ابتدا از یک $\tan^{2}(x)$ فاکتور گرفته و به آن عدد یک را اضافه و کم می‌کنیم.

با فرض $\tan(x) = u$ جواب به دست می‌آید.

الف) $\int \tan^{3}(x)\,dx = \int \tan^{2}(x)\,(\tan(x))\,dx = \int (\tan^{2}x + 1 - 1)\tan x\,dx =$

$$\int (\tan^{2}(x) + 1)\tan x - \tan x\,dx = \int \tan(x)(1+\tan^{2}(x))\,dx - \int \tan x\,dx =$$

$$\frac{\tan^{2}(x)}{2} + \ln(|\cos(x)|) + c \qquad \begin{cases} \tan(x) = u \\ (1+\tan(x))\,dx = du \end{cases}$$

ب) $\int \cot^{5}(x)\,dx = \int \cot^{2}(x)(\cot^{3}x)\,dx = \int (\cot^{3}(x))(1+\cot^{2}x)\,dx - \int \cot^{3}(x)\,dx$

$$= \frac{-\cot^{4}(x)}{4} - \int \underbrace{\cot^{2}x}_{(\cot^{2}x + 1 - 1)} \cot x\,dx$$

(کامل‌ترین حل در منزل)

Sunwood

Scanned by CamScanner

Month. Date. ۱۴

ج) توان های $\sec$ ($\csc$) :

۱ـ اگر n زوج باشد آنگاه ($\int \sec^n(x)\,dx$) ابتدا از یک $\sec^2(x)$ فاکتور گرفته آنگاه $\sec^{n-2}(x)$ را با کمک فرمول $1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$ برحسب توان های $\tan(x)$ تبدیل می‌نماییم. اکنون با فرض $u=\tan(x)$ جواب بدست می‌آید.

مثال ـ $\int \sec^4(x)\,dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x\,dx = \int \sec^2(x)(1+\tan^2(x))\,dx =$

$\int \sec^2 x\,dx + \int \sec^2 x \tan^2 x\,dx = \int \tan^2(x)\sec^2(x)\,dx =$

$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \tan(x) + \frac{\tan^3(x)}{3} + c$

$\tan x = u$

$\sec^2 x\,dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2(x)}$

۲ـ اگر n فرد باشد آنگاه ابتدا از یک $\sec^2 x$ فاکتور گرفته و سپس با جزء به جزء (با فرض $\sec^2(x)\,dx = dv$ و $\sec^{n-2}(x)=u$) می‌توان آنرا محاسبه نمود. توجه شود که محاسبه انتگرال $\int \sec^n(x)\,dx$ مشروط به دانستن جواب $\int \sec^{n-2}(x)\,dx$ باشد.

مثال ـ $\int \sec^3(x)\,dx = \int \underbrace{\sec x}_{u}\ \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv} =$ ←

$\begin{cases} \sec x = u \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} \\ \sec^2 x\,dx = dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} \end{cases} \begin{cases} \sec x \tan x\,dx = du \\ \tan x = v \end{cases}$

Sunwood

Scanned by CamScanner

$\ast \rightarrow \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x = \sec \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$

$\int \sec^3(x)\, dx = \sec(x)\tan(x) - \int \sec^3(x)\,dx + \int \sec(x)\,dx$

$2\int \sec^3(x)\,dx = \sec(x)\tan(x) + \int \sec(x)\,dx =$

$\int \sec^3 x\, dx = \frac{\sec(x)\tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|}{2}$

جلسه ششم

انتگرال معین:

افراز: منظور از افراز بازه $[a,b]$ یعنی تقسیم کردن این بازه به زیر فاصله های $[a,b]$ را به n قسمت مساوی افراز نماییم. داریم:

$x_1 = x_0 + \Delta$

$x_2 = x_0 + 2\Delta$

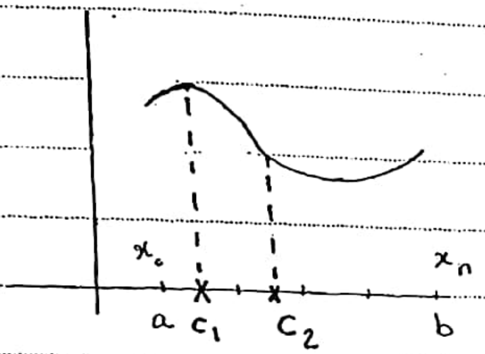
$\vdots$

$x_n = x_0 + n\Delta \longrightarrow \Delta = \frac{b-a}{n}$

مجموع ریمان (افراز منظم): هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه مجموع ریمان با افراز منظم $\left(\Delta = \frac{b-a}{n}\right)$ عبارت است از:

Scanned by CamScanner

مجموع ریمان $= f(c_1) \times \Delta + f(c_2) \times \Delta + \dots + f(c_n) \times \Delta \rightarrow x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$



مجموع ریمان $= \sum_{i=1} f(c_i) \times \Delta$

انتگرال معین: برای تابع $f(x)$ پیوسته بر $[a,b]$ انتگرال معین عبارت است از:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta\right) =$$

$$\lim \left(f(c_1) \times \Delta + f(c_2) \times \Delta + \dots + f(c_n) \times \Delta \right)$$

به بیان ساده: مجموع ریمان وقتی که تعداد گره های افراز به سمت ∞ میل می کند = انتگرال معین

به دست آوردن جواب انتگرال معین:

هرگاه $\int f(x)\,dx = G(x) + c$ باشد آنگاه: $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

مثال - حاصل $\int_2^3 x^4\,dx$ را بدست آورید.

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + c \rightarrow \int_2^3 x^4\,dx = \frac{(3)^5}{5} - \frac{2^5}{5} = \frac{211}{5}$$

ویژگی انتگرال معین:

۱) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Scanned by CamScanner

۲- برای هر عدد c داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

۳- اگر $\alpha \in R$ باشد:

$$\int_a^b \alpha f(x) + g(x) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)$$

۴- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۵- هرگاه $f(x) \geqslant g(x)$ در بازه $[a,b]$ باشد آنگاه:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

۶- هرگاه $f(x) \geqslant 0$ در $[a,b]$ باشد آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

۷- هرگاه $f(x)$ یک تابع فرد باشد آنگاه:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

هرگاه $f(x)$ یک تابع زوج باشد آنگاه:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

۸- روش جزء به جزء در انتگرال معین:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

کلاً مسئله انتگرال گرفتن به تری بازه قرار دارد.

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = (1e^1 - 0e^0) - \int_0^1 e^x\,dx = 1$$

روش تغییر متغیر:

می‌توان کران های جدید انتگرال را به کمک تغییر متغیر بدست آوریم.

(و یا بصورت روش مستقیم)

$$\int_1^2 (2x+1)^4\,dx = \int_3^5 u^4 \times \frac{1}{2}\,du$$

$$\begin{cases} 2x+1 = u \\ dx = \frac{1}{2}du \end{cases} \qquad x=1 \xrightarrow{2x+1=u} u=3 \qquad x=2 \longrightarrow u=5$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۳۵

Month.......... Date.......... ۱۸

کاربردهای انتگرال معین:

توجه شود که هرگاه n جمله برحسب n با هم جمع شوند و سپس از آن‌ها حد گرفته شود به طوری که $n \to \infty$ آنگاه جواب این حد با کمک تعریف انتگرال (معمولاً) محاسبه می‌شود.

مثال –
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}+\frac{e^{\frac{2}{n}}}{n}+\cdots+\frac{e}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\Delta}+e^{\frac{2}{n}}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\Delta}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\Delta}\right)$$

$$\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n} \qquad \overset{1}{b}-\overset{0}{a}=1$$

$$c_i=\frac{i}{n} \longrightarrow f(c_i)=e^{c_i} \longrightarrow f(x)=e^x$$

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

نکته: در این حدها به صورت زیر عمل شود:

(۱٫۵ نمره امتحان)

۱- ابتدا از $\frac{1}{n}$ فاکتور گرفته شود.

۲- بازه انتگرال $[0,1]$ درنظر گرفته شود.

۳- به جای $\frac{i}{n}$ های یک جمله دلخواه در مجموع کافی است x قرار دهیم تا ضابطه $f(x)$ بدست آید.

Sunwood

Scanned by CamScanner

۳۷

Subject: ....

Year:...... Month:...... Date:......( )

$\lim \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} + \frac{e^{\frac{2}{n}}}{n} + \cdots + \frac{e}{n} \right) =$

$\lim \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e \right) = \int_0^1 e^x \, dx$

($e^{\frac{2}{n}} \to e^x$)

الف) $\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \quad \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = \int_0^1 \ln|1+x| = \ln 2 + c$

ب) $\lim \left(\frac{n}{(n+1)^3} + \frac{2n}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \right) =$

$\lim \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{2n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{n}{n^n} \right) =$

$\lim \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{(n(1+\frac{1}{n}))^3} + \frac{2n^2}{(n(1+\frac{2}{n}))^3} + \cdots + \frac{1}{8} \right) =$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^3} + \frac{\frac{2}{n}}{(1+\frac{2}{n})^3} + \cdots \right) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^3} dx$

ج) $\lim \frac{1}{n^2} \left(\sin(\frac{1}{n}) + 2\sin(\frac{2}{n}) + \cdots + n\sin(\frac{n}{n}) \right) =$

$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}) + \frac{2}{n} \sin(\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{n}{n} \sin(\frac{n}{n}) \right)$

$\int_0^1 x \sin(x) \, dx =$

Sunwood

Month. Date. ۹

د) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^3}{i(i^2+n^2)} =$

$\lim \frac{1}{n}\left(\frac{n^3}{(1+n^2)} + \frac{n^3}{2(2^2+n^2)} + \cdots\right) = \lim \frac{1}{n} \frac{n^3}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} + \frac{n^3}{2n^2(1+\frac{2^2}{n^2})} =$

$\frac{1}{\frac{1}{n}(1+(\frac{1}{n})^2)} + \frac{1}{\frac{2}{n}(1+(\frac{2}{n})^2)} = \int_0^1 \frac{1}{x(1+x^2)}$

ه) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) =$

$\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(1+n)^2} + \frac{n^2}{(2+n)^2} + \cdots\right)$

$\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n})} + \frac{n^2}{(n^2(2+\frac{1}{n}))^2}\right)$

$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{1+x}\Big|_0^1$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject:

Year......Month......Date......( )

Sunwood

Scanned by CamScanner

جلسه هفتم

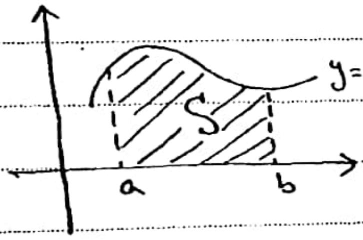
قضیه لایب نیتز :

$$\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right)' = g_2'(x) \times f(g_2(x)) - g_1'(x) \times f(g_1(x))$$

مثال : $\left(\int_{x^2}^{2x^3} \sin^{10}(t)\,dt\right)' = 6x^2 \times \sin^{10}(2x^3) - 2x \times \sin^{10}(x^2)$

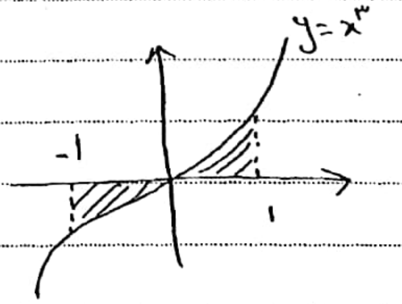
نتیجه حسابان : $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

نکته : هرگاه $f(x) \geq 0$ و پیوسته بر $[a,b]$ باشد آنگاه مساحت زیر نمودار تابع



تا محور x ها در فاصله $[a,b]$ ، $\int_a^b f(x)\,dx$

فرض می‌شود که جواب هر انتگرال معین برابر با مساحت زیر نمودار نمی‌باشد.



مثال : $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$

نکته : هرگاه $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه :

مساحت زیر نمودار $= \int_a^b |f(x)|\,dx$

Scanned by CamScanner

نحوه بدست آوردن انتگرال های قدر مطلقی:

برای محاسبه این انتگرال ها، ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت کرده و سپس با توجه به حدود انتگرال و جدول تعیین علامت آن را به چند انتگرال بدون قدر مطلق تبدیل می‌نماییم.

مثال- مساحت زیر نمودار $y=x^3$ با محور xها در فاصله $[-1,1]$ را بدست آورید.

x	-1		0		1
x^3		$-$	0	$+$	

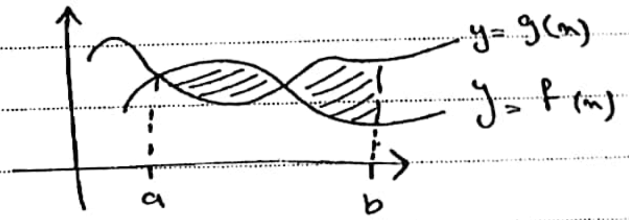
$$\text{مساحت} = \int_{-1}^{1} |x^3|\, dx =$$

$$\int_{-1}^{0} |x^3|\, dx + \int_{0}^{1} |x^3|\, dx =$$

$$\int_{-1}^{0} -x^3\, dx + \int_{0}^{1} x^3\, dx = \frac{1}{2}$$

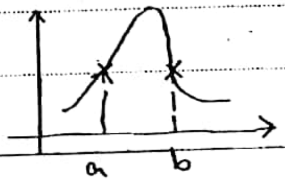
نکته: هرگاه توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه مساحت بین نمودار ۲ تابع عبارتست از:

$$\text{مساحت} = \int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx$$



* طول قوس: هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$



Scanned by CamScanner

مثال - طول قوس قسمتی از منحنی $y=x^2$ را در فاصله $[0,2]$ بدست آورید.

$$L=\int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

از تغییر متغیر a^2+x^2: $\left\{ 2x=\tan\theta \right.$

ادامه به صورت تمرین

هم مثال - اگر $f(x)=\int_0^x \sqrt{\cos^2(t)-1}\,dt$ باشد آنگاه قسمتی از طول قوس منحنی تابع $f(x)$ در فاصله $[0,\pi]$ را بدست آورید. از قضیه حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده می‌کنیم. وقتی یکی از کران‌ها متغیر بود

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \rightarrow \quad f'(x)=\left(\int_0^x \sqrt{\cos^2(t)-1}\,dt\right)'=\sqrt{\cos^2(x)-1}$$

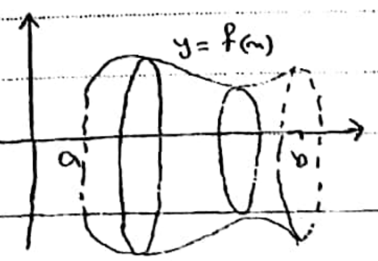
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\left(\sqrt{\cos^2(x)-1}\right)^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\,dx=1+1=2$$

اهمیت

سطح و حجم حاصل (حاصل) از دوران :

هرگاه یک منحنی را حول محور xها یا yها و یا هر خط دوران دهیم آنگاه حاصل یک فضای سه بعدی است که هدف این قسمت محاسبه حجم و مساحت جانبی این فضای سه بعدی است.



Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ....
Year: .... Month: .... Date: .... ( )

الف) مساحت جانبی: هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه مساحت جانبی حاصل از دوران حول محور xها عبارت است از:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

مثال: مساحت جانبی حاصل از دوران $y=x^2$ را حول محور xها در فاصله $[0,1]$ بدست آورید.

$$S = 2\pi \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx \qquad \begin{cases} 2x = \tan\theta \\ 2dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\int x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int \frac{\tan^2\theta}{4}\sqrt{\sec^2\theta} \times \frac{\sec^2\theta}{2}\,d\theta$$

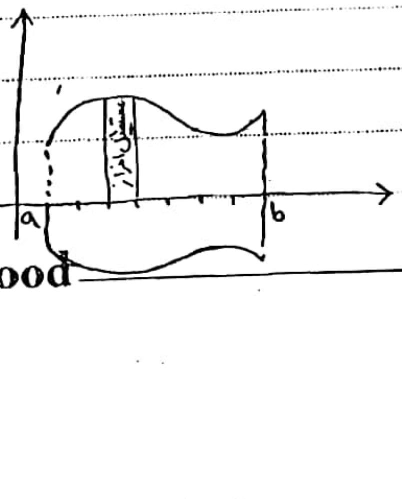
$$= \frac{1}{8}\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta \times \cos^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{8}\int \sec^5\theta - \sec^3\theta\,d\theta$$

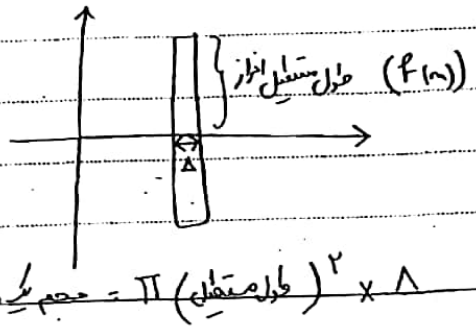
حجم حاصل از دوران:

هرگاه $y=f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه جهت یافتن حجم حاصل از دوران منحنی حول یک محور از دو روش می‌توان استفاده نمود: ۱- روش واشری ۲- روش پوسته‌ای

۱- روش واشری: در این مستطیل‌های افراز عمود بر محور دوران و متصل به محور دوران می‌باشند

$$V = \pi \int_a^b (\text{طول مستطیل افراز})^2\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



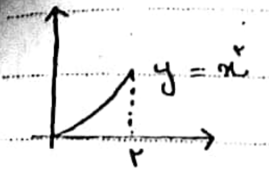


$\pi\,(\text{طول مستطیل})^2 \times \Delta$ = حجم یک واشر

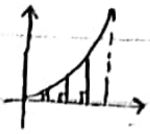
Sunwood

Scanned by CamScanner

مثال - حجم حاصل از دوران $y=x^2$ را در فاصله $[0,2]$ حول محورهای زیر را بیابید:



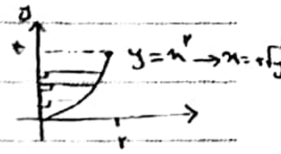
الف) محور xها ب) محور yها



الف) $V=\pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx$

مستطیل افراز متصل به محور دوران

ب) حجم $=\pi\int_0^4 (\sqrt{y})^2\,dy$



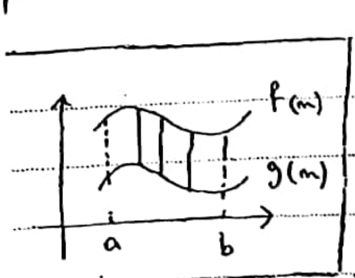
۲- روش تعمیم واشری:

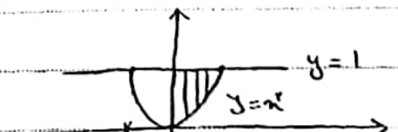
هرگاه فضای بین نمودارهای ۲ تابع پیوسته $f(x)$ و $g(x)$ را در فاصله $[a,b]$ حول محور xها دوران دهیم آنگاه حجم حاصل از دوران عبارت است از:

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2-(g(x))^2\,dx$$
(مستطیل افراز به محور دوران متصل نمی‌باشد)

مثال - مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه بین $y=x^2$ و $y=1$ حول محورهای زیر:

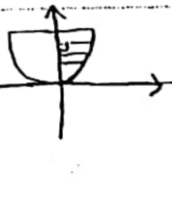
الف) محور xها ب) محور yها ج) $y=2$





$y_1=y_2 \to x^2=1 \to x=\pm1$

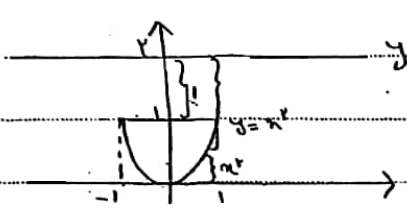
الف) $V=\pi\int (1)^2-(x^2)^2\,dx$



ب) $\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2\,dy$

Sunwood

Scanned by CamScanner



y = 2 $\quad V = \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 - (1)^2 \, dx$

انتگرال های مجازی (ناسره یا غیرعادی):

می دانیم در انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ تابع $f(x)$ در بازه معین $[a,b]$ پیوسته است. حال یکی از شرایط فوق در صورت زیر موجود نباشد، انتگرال غیرعادی گفته می‌شود.

الف) انتگرال غیرعادی نوع اول:

هرگاه تابع $f(x)$ در $[a,+\infty)$ پیوسته باشد آنگاه تعریف کرده:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\int_a^t f(x)\,dx \right)$$

با توجه به اینکه جواب انتگرال ناسره مربوط به دست آوردن حد گردید لذا ممکن است این حد عدد بشود یا نشود که تعاریف زیر نتیجه می‌گردد. اگر جواب حد عدد بشود انتگرال را همگرا در غیر این صورت انتگرال واگرا می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{k \to -\infty} \left(\int_k^b f(x)\,dx \right)$$

مثال- همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی نمایید.

الف) $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$

Scanned by CamScanner

(۴۵)

Month........ Date ۲۳

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left(\int_1^k e^{-x}\,dx\right)$$

$$\int e^{-x}\,dx = \int e^u \times -du = -e^u + c = -e^{-x} + c \qquad \begin{cases} -x = u \\ -dx = du \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(-e^{-k} - (-e^{-1})\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ب) $\int_{-\infty}^{1} e^{-x}\,dx = \lim_{k\to-\infty}\left(\int_k^1 e^{-x}\,dx\right) = \lim\left(-e^{-x}\Big]_k^1\right) = \lim_{k\to-\infty}\left(-e^{-1} + e^{-k}\right)$ واگرا

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$$\lim_{k\to-\infty}\int_k^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{k\to-\infty}\left(\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0)\right)$$

$$+ \lim_{t\to+\infty}\left(\text{Arctan}\,t) - \text{Arctan}(1)\right)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}\,x + c$$

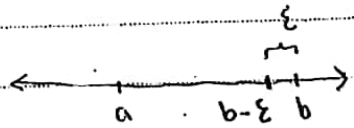
$$= \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

جلسه هشتم

۲) انتگرال های غیرعادی نوع دوم:

هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,b)$ پیوسته باشد بطوریکه $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ آنگاه تعریف کرده

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right)$$



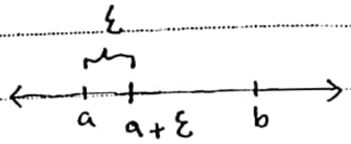
Scanned by CamScanner

Subject (۴۷) * نکته: این نوع انتگرال ها معمولاً کسری است و در روی بی نهایت است.

Year........ Month........ Date........ ( )

بطور مشابه اگر $f(x)$ بر $(a,b]$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)$$



مثال- همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی نمایید:

الف) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ چون جواب حد ∞ نشد لذا انتگرال عادی است.

(انتگرال عادی جواب دارد اما انتگرال غیرعادی ممکن است جواب داشته باشد و یا جواب نداشته باشد.)

ب) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ تابع در نقطه صفر پیوسته نمی باشد و حد آن ∞ است لذا انتگرال غیرعادی است.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\left(\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x^2}\,dx\right)+\lim\left(\int_{0+\delta}^1 \frac{1}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{-\varepsilon}\right) + \lim_{\delta\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\Big]_{\delta}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)+\lim_{\delta\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right)$$

حد وجود ندارد لذا انتگرال واگرا است.

ج) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ تابع $\frac{1}{\sqrt{x}}$ در نقطه ۰ تعریف نشده است و نیز $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ لذا انتگرال غیرعادی است.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\left(\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1}\right) = 2$$

انتگرال همگرا است.

Sunwood

Scanned by CamScanner

۴۷

Month........ Date........ ۲۳

انتگرال های غیر عادی نوع سوم:

این انتگرال ها بصورت ترکیبی از نوع اول و دوم می باشند.

مثال- همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی نمایید.

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{3}\frac{1}{x}\,dx + \int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx\right) + \lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{0+\delta}^{3}\frac{1}{x}\,dx\right) + \lim_{k\to+\infty}\left(\int_{3}^{k}\frac{1}{x}\,dx\right)$$

توجه شود که هر یک از انتگرال ها اگر واگرا شوند آنگاه کل انتگرال واگرا است.

تقسیم و آزمون های همگرایی:

هدف در این قسمت معرفی و بیان انتگرال های غیرعادی می باشد بطوری که همگرایی و واگرایی آن ها برای ما مشخص است. اکنون هر انتگرال غیرعادی را می توان با کمک انتگرال های شاخص بزرن استفاده از روش تمرین در مورد همگرایی آن صحبت نمود.

مثال- بازای مقادیر مختلف k در مورد همگرایی و واگرایی انتگرال ها زیر بحث نمایید.

الف) $$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{k}}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\int_{1}^{t}\frac{1}{x^{k}}\,dx\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\Big]_{1}^{t}\right) =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{-k+1}}{-k+1} - \frac{1}{-k+1}\right) = \begin{cases} \text{انتگرال همگرا} & k>1 \\ \text{انتگرال واگرا} & k<1 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim\left(\int_{1}^{t}\frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln(t)\right) = +\infty$$

$(k=1)$

ب) $\int_1^{+\infty} e^{kx}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_1^t e^{kx}\,dx\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{k}e^{kx}\Big]_1^t\right) =$

$\lim\left(\frac{1}{k}e^{tk} - \frac{1}{k}e^{k}\right) = \begin{cases} \text{واگرا} & k \geq 0 \\ \text{همگرا} & k < 0 \end{cases}$

اگر $k=0$ باشد جواب ∞ می‌شود

ج) $\int_0^2 \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{1}{x^k}\,dx\right) \overset{k\neq1}{=} \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\Big]_\varepsilon^2\right) =$

$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{2^{-k+1}}{-k+1} - \frac{\varepsilon^{-k+1}}{-k+1}\right) = \begin{cases} \text{واگراست} & k \geq 1 \\ \text{همگراست} & k < 1 \end{cases}$

$k=1 \longrightarrow \int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim\left(\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\ln(2) - \ln(\varepsilon)\right) = +\infty$

قضیه: هرگاه $f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ در بازه $[a, +\infty)$ باشند (و پیوسته) آنگاه

$f(x) \leq g(x)$ باشد آنگاه

الف) اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا است.

ب) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} g(x)$ واگرا است.

مثال: همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی نمایید.

الف) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \quad \frac{\sin^2(x)}{x^2} \geq 0 \quad , \quad \frac{1}{x^2} \geq 0$

Scanned by CamScanner

(۴۹)

Month ...... Date ۲۵

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

حال چون $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ همگرا است لذا طبق قضیه (مقایسه) انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$

همگرا است.

ب) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+3}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2x+3} \geq 0 \;,\; \frac{1}{5x} \geq 0$

اما $\quad 2x+3 \leq 2x+3x \Rightarrow$

$$\frac{1}{5x} \leq \frac{1}{2x+3}$$

حال چون $\int_1^{+\infty} \frac{1}{5x}\,dx$ واگرا است لذا: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+3}\,dx$ واگرا است.

آزمون حدی:

هرگاه $f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ و چنانچه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ آنگاه

الف) اگر $L \neq 0$ و عدد باشد آنگاه هر دو انتگرال هم‌رفتارند (یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا)

ب) اگر $L = 0$ باشد و $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا است.

ج) اگر $L = +\infty$ و $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا است.

نکته: برای استفاده از آزمون حدی برای انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ کافی است یک انتگرال

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ۵۹

Year. Month. Date. ( )

شناخته شده در مخرج کسر قرار دهیم و صورت سوال در صورت بطور کلی بهتر است

جواب عدد حد بشود.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{عدد}$$

(مجهول: $f(x)$ ، شناخته شده: $g(x)$)

مثال - همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی نمایید:

الف) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}\,dx$ $\qquad \frac{\sin^2 x}{x^3}\,dx \geq 0$ و $\frac{1}{x^2} \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = 0$$

($\frac{1}{x^2}$ همگرا)

طبق قسمت (ب) آزمون حدی $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}\,dx$ همگرا است.

ب) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x+3}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2x+3} \geq 0$, $\frac{1}{x} \geq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2x+3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+3} \overset{Hop}{=} \frac{1}{2}$$

($\frac{1}{x}$ واگرا) لذا انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+3}\,dx$ واگرا است.

تعریف: انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ را بطور مطلق (یا مشروط مطلق) همگرا گوییم هرگاه $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ همگرا باشد.

قضیه: اگر $\int_a^{+\infty} |g(x)|\,dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا است.

مثال - همگرایی یا واگرایی $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ را بررسی نمایید.

چون $\frac{\sin x}{x^2}$ همواره مثبت نمی باشد لذا امکان استفاده از آزمون حدی و مقایسه موجود نمی باشد.

Sunwood

Scanned by CamScanner

اما چون $\int_{2}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|dx$ همگرا است ($\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$) لذا انتگرال

$\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ همگرا است.

تعریف همگرایی مشروط:

هرگاه $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ همگرا باشد اما $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|dx$ واگرا باشد آنگاه می‌گوییم

که انتگرال ($\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$) بطور مشروط همگرا است.

با قدر مطلق همگرا ⟵ ✓ ⟶ بدون قدر مطلق همگرا است

✗ ⟶

همگرا مشروط ✓ ⟶

جلسه نهم

* مثال. نشان دهید $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگرا مشروط است. (ادامه جواب در صفحه‌ی بعد)

باید نشان دهیم:

① انتگرال $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست

② انتگرال $\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ واگراست

نکته: توجه شود می‌توان با استفاده از روش جزء به جزء ظاهر انتگرال اولیه را تغییر داد به طوری که برای انتگرال جدید ($\int v\,du$) یکی از روش‌های تعریف یا آزمون حدی یا آزمون مقایسه و یا همگرایی با قدر مطلق را در نظر گرفت.

Scanned by CamScanner

(۵۲)

Subject:

Year: Month: Date: ( )

برای استفاده از جزء به جزء داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = u \\ \sin x\, dx = dv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} dx = du \\ -\cos x = v \end{cases}$$ ①

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left. \frac{-\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\left. \frac{\cos x}{x} \right]_1^t \right)$$

$$= \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$ همگرا

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

چون $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ همگرا است لذا $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ همگرا است

و طبق حکم $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ همگرا است.

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$$ واگرا ②

$$\frac{1}{2} \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx \right) \Longrightarrow$$ واگرا است

(واگرا) (همگرا)

Sunwood

Scanned by CamScanner

۵۳

Month. Date. ۲۷

اعداد مختلط:

به دوتایی (x, y) بطوریکه $x, y \in \mathbb{R}$ باشند یک عدد مختلط گفته و آنرا با نماد z نشان می‌دهیم

یعنی $z = (x, y)$.

به عنوان مثال $(\sqrt{3}, 2)$ یک عدد مختلط است. هرگاه $z_1 = (x, y)$ و $z_2 = (a, b)$

دو عدد مختلط باشند آنگاه داریم:

① $z_1 + z_2 = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$

② $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha z_1 = \alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

③ $(x, 0) = x$

④ $z_1 \cdot z_2 = (x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya)$

⑤ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x, y)}{(a, b)} = \left(\dfrac{xa + yb}{a^2 + b^2}, \dfrac{ya - bx}{a^2 + b^2}\right)$

مثال: مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$\frac{3(1, -2)}{(1, 1) + (2, 3)} + 5 = \left(\frac{-15}{25}, \frac{-30}{25}\right) + (5, 0) = \left(\frac{22}{5}, \frac{-6}{5}\right)$$

$$\frac{(3, -6)}{(3, 4)} = \left(\frac{-15}{(3)^2 + (4)^2}, \frac{-30}{(3)^2 + (4)^2}\right)$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ۶۵

Year. Month. Date. ( )

قرارداد: عدد مختلط (۱ و ۰) را به دلیل اهمیت جمعت سادهنویسی با نماد i نشان میدهیم.

تمرین: ثابت کنید هر عدد مختلط $z=(x,y)$ را می‌توان بصورت $z=x+iy$ نشان دهیم.

$$\left((x,y)=x+iy\right)$$

$$x+iy=x+(0,1)y=(x,0)+(0,y)=(x,y)$$

نکته: همواره داریم: $i^2=-1$

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,\ 0+0)=-1$$

نکته: برای حاصلضرب دو عدد مختلط ابتدا آنها را بصورت $x+iy$ نوشته و سپس مانند دو عبارت جبری درهم ضرب کرده و با کمک $i^2=-1$ کار تمام است.

مثال: $(3,-2)\cdot(1,\frac{1}{2})=\left[3+i(-2)\right]\left[1+i\frac{1}{2}\right]=$

$$3+\frac{3}{2}i-2i-i^2=3+\frac{3}{2}i-2i+1=4-\frac{1}{2}i=(4,-\frac{1}{2})$$

برای عدد مختلط $z=(x,y)$ تعریف کرده:

الف) اندازه عدد مختلط: اندازه عدد z عبارت است از: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

ب) مزدوج عدد z عبارت است از: $\bar{z}=(x,-y)$; $(\bar{z}=$ zبار$)$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۵۵

Month........ Date........ ۲۸

ج) قسمت حقیقی و موهومی: $Re(z) = x$, $Im(z) = y$

قسمت حقیقی — قسمت موهومی

مثال ـ برای عدد مختلط $z = 2 - 3i$

مطلوب است محاسبه: الف) $|z| = \sqrt{2^2 + (3i)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

ب) $\bar{z} = (2, +3i)$ $+i - 3$

ج) $Re(4z) = 4(2-3i) = 8 - 12i \Rightarrow Re = 8$

د) $Im(z - 2i) = 2 - 3i - 2i = 2 - 5i \Rightarrow Im = -5i$

هرگاه $z_1 = x + iy$ و $z_2 = a + ib$ مفروض باشد آنگاه داریم:

① $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

② $(\bar{\bar{z}}_1) = z_1$

③ $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

④ $(\overline{z_1 \cdot z_2}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

⑤ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$

⑥ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Sunwood

Scanned by CamScanner

⑦ $Re(z) \leqslant |z|$

$Im(z) \leqslant |z|$

⑧ $z_۱ + \bar{z}_۱ = ۲Re(z_۱)$

$z_۱ - \bar{z}_۱ = ۲Im(z_۱)$

*
*⑨ $z_۱ . \bar{z}_۱ = |z_۱|^۲$

$(z_۱ . \bar{z}_۱ = (\sqrt{x^۲+y^۲})^۲ = x^۲ + y^۲)$

* نکته : هرگاه در عبارت کسری که مخرج آن عدد مختلط باشد (برای ازبین برون آن کافی است)

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب نماییم ، یعنی :

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{z_۱}{z_۲} \times \frac{\bar{z}_۲}{\bar{z}_۲} = \frac{z_۱ . \bar{z}_۲}{|z_۲|^۲}$$

مثال

$$\frac{(۳,-۶)}{(۳,۴)} = \frac{۳-۶i}{۳+۴i} = \frac{۳-۶i}{۳+۴i} \times \frac{۳-۴i}{۳-۴i} = \frac{۹-۱۲i-۱۸i+۲۴i^۲}{} =$$

$$\frac{-۱۵-۳۰i}{۲۵} = \frac{-۱۵}{۲۵} + \frac{-۳۰i}{۲۵} = (-\frac{۳}{۵}, -\frac{۶}{۵})$$

تمرین - برای دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ ثابت نمایید :

$$|z_۱ + z_۲| \leqslant |z_۱| + |z_۲|$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Month. Date. ۲۹

$|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$ راهنمایی: نشان دهید:

$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) =$

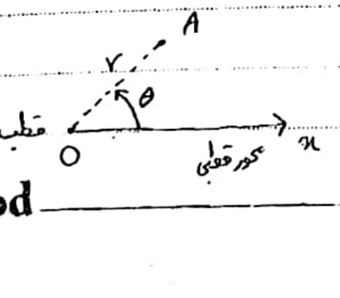
نمایش قطبی (مثلثاتی) عدد مختلط :

دستگاه مختصات وسیله یا ابزاری است برای بیان ماهیت یک شیء. (دستگاه مختصات کرم، متر، ...)

دستگاه مختصات قطبی: می‌دانیم می‌توان ماهیت مکان نقاط در صفحه را به وسیله‌ی دستگاه مختصات دکارتی مشخص نمود. هدف جایگزینی وسیله و یا دستگاه مختصاتی به جای دستگاه مختصات دکارتی می‌باشد.

این دستگاه مختصات را قطبی می‌نامیم به طوری که تشکیل شده از یک نقطه‌ی ثابت در صفحه به نام قطب با نماد O و نیز نیم خط Ox به نام محور قطبی (مشابه با قسمت مثبت محور xها).

اکنون هر نقطه مانند A در صفحه توسط این دستگاه به صورت $A=(r,\theta)$ نمایش داده می‌شود که عبارت اند از:



فاصله نقطه A از قطب $= r$

زاویه $\vec{OA}$ با محور قطبی در $= \theta$

جهت مثلثاتی

Scanned by CamScanner

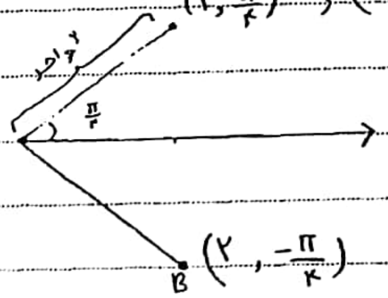
مثال ـ نقاط زیر در دستگاه قطبی را نشان دهید.

الف) $A=(۲, \frac{\pi}{۴})$

ب) $B=(۲, -\frac{\pi}{۴})$

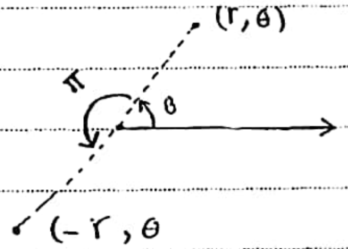
ج) $C=(۲, ۲\pi+\frac{\pi}{۴})$

A $(۲, \frac{\pi}{۴})$, $(۲, ۲\pi+\frac{\pi}{۴})$ C



نکته: هر نقطه از صفحه توسط دستگاه قطبی دارای بی‌نهایت نمایش است.

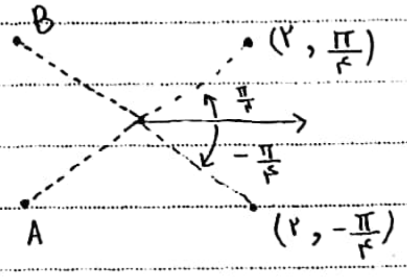
قرارداد: با توجه به آنکه در نمایش قطبی $A=(۲,\theta)$، ۲ فاصله است لذا قرارداد کرده نمایش $(-۲,\theta)$ قرینه نقطه $(۲,\theta)$ نسبت به قطب باشد.



به عبارتی دیگر نمایش $(-۲,\theta)$ همان نمایش $(۲,\pi+\theta)$ است.

مثال ـ نقاط زیر در دستگاه قطبی را نمایش دهید.

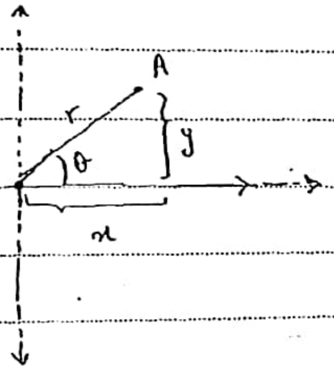
الف) $A=(-۲, \frac{\pi}{۴})$ ب) $B=(-۲, -\frac{\pi}{۴})$



Scanned by CamScanner

رابطه بین دستگاه قطبی و دکارتی: به طور همزمان دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی را در صفحه در نظر بگیرید

به طوری که مبدأ مختصات و قطب بر هم منطبق باشند. آنگاه داریم:



دستگاه قطبی	دستگاه دکارتی
$r\cos(\theta)$	$x =$
$r\sin(\theta)$	$y =$

$x^2+y^2=r^2 \longrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\boxed{\tan(\theta)=\frac{y}{x}}$

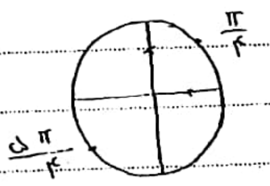
برای عدد $z=x+iy$ نمایش قطبی (یا مثلثاتی) آن به صورت $z=r\,cis(\theta)$ است.

$z=x+iy=r\cos(\theta)+i\,r\sin(\theta)=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=r\,cis(\theta)$

تعریف: در نمایش قطبی $z=r\,cis(\theta)$، به θ آرگومان z گفته می‌شود.

$Arg(z)=\theta$

مثال: نمایش قطبی عدد مختلط $z=2+2i$ را بنویسید.



$z=(2,2)$

$z=r\,cis(\theta)$

$r=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=2\sqrt{2}$

$\tan(\theta)=\frac{2}{2}=1 \longrightarrow \begin{cases}\theta=\frac{\pi}{4} \ \checkmark \\ \text{یا} \\ \theta=\pi+\frac{\pi}{4} \ \text{غلط}\end{cases}$

$z=2\sqrt{2}\,cis(\frac{\pi}{4})$

Scanned by CamScanner

Subject: ۲۹
Year. Month. Date. ( )

نکته: برای یافتن آرگومان (زاویه) یک عدد مختلط ابتدا با توجه به مختصات دکارتی یک نقطه ربع مورد نظر آن را مشخص نموده و پس آرگومان را تعیین می‌نماییم، که توجه شود همواره در زاویه وجود داردیم $\tan$ آنها با هم برابر است به طوری که اگر زاویه اول α باشد زاویه دوم $\pi + \alpha$ است.

جلسه دهم

تمرین - هرگاه $z_1 = r_1 \, cis(\theta_1)$ و $z_2 = r_2 cis(\theta_2)$ باشد آنگاه ثابت کنید:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, cis(\theta_1 + \theta_2)$$

مثال - اگر $z_1 = 2cis(\frac{\pi}{4})$ و $z_2 = 3\, cis(\frac{\pi}{3})$ آنگاه: $z_1 \cdot z_2 = 6\, cis(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$

نکته: اگر $z = r cis(\theta)$ باشد آنگاه:

$$z^2 = r^2 \, cis(2\theta)$$

$$z^3 = r^3 \, cis(3\theta)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{z^n = r^n \, cis(n\theta)}$$

مثال - $(2\, cis(\frac{\pi}{4}))^5 = 2^5 \, cis(\frac{5\pi}{4}) = 32(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

Sunwood

Scanned by CamScanner

قانون دموآر: $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

نکته: برای توان رساندن هر عدد مختلط ابتدا باید آن را بفرم مثلثاتی (قطبی) نوشت و سپس توان رساند.

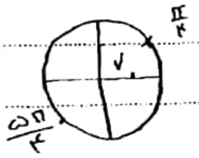
مثال - حاصل های زیر را بیابید. برای به دست آوردن تقسیم از مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

الف) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{300}$

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{-2}{4} + i\frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1}{2}\, i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

ب) $(2+i2)^4 = (2,2) \longrightarrow r = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\tan(\theta) = \frac{2}{2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \checkmark \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \pi \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$



$$2+i2 = 2\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2+i2)^4 = \left(2\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = (2\sqrt{2})^4\, cis\left(4\times\frac{\pi}{4}\right)$$

ادامه مثال الف $\longrightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, $\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{غ ق ق} \\ \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \checkmark \end{cases}$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{300} = \left(-\frac{1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{300} = \left(1\,cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)^{300} =$$

$$cis(400\pi) = \cos(400\pi) + i\sin(400\pi) = 1$$

ریشه n ام یک عدد مختلط: در ریشه و یا رساندن توان، یک عدد مختلط باید آن را

Sunwood

Scanned by CamScanner

$\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3 + i0}$ (۴۲)

Subject:

Year ____ Month ____ Date ____ ( )

به فرم قطبی نوشت.

اگر $z = r\,cis(\theta)$ که عدد مختلط باشد آنگاه $\sqrt[n]{z}$ برابر است با n عدد مختلط

که از فرمول زیر بدست می‌آید.

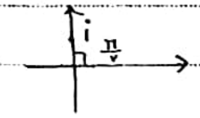
$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r}\; cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right\}_{k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

مثال - $\sqrt[3]{8\,cis\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{8}\; cis\left(\frac{\pi}{15}\right) \\ z_2 = \sqrt[3]{8}\; cis\left(\frac{11\pi}{15}\right) \\ z_3 = \sqrt[3]{8}\; cis\left(\frac{21\pi}{5}\right) \end{cases}$

مثال - حاصل $\sqrt[4]{i}$ را بیابید.

$i = 0 + i1 = (0, 1)$

$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ $\quad \tan(\theta) = \frac{1}{0}$



$i = 1\,cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt[4]{i} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{1}\; cis\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ z_2 = \sqrt[4]{1}\; cis\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ z_3 = \sqrt[4]{1}\; cis\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\ z_4 = \sqrt[4]{1}\; cis\left(\frac{13\pi}{8}\right) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

بدست آوردن ریشه معادله درجه ۲ با $\Delta<0$:

هرگاه مشخص Δ در یک معادله درجه ۲ کوچکتر از صفر باشد آنگاه این معادله دارای دو ریشه مختلط است

که با ذکر یک مثال نحوه یافتن ریشه معادله را توضیح می دهیم.

مثال ـ ریشه های معادله $x^2+2x+3=0$ را بیابید.

$$\begin{cases} x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{-8}}{2} \quad \underline{i^2=-1} \quad \dfrac{-2+\sqrt{i^2\times 8}}{2}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}i}{2}=-1+i\sqrt{2} \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{-8}}{2}=-1-i\sqrt{2} \end{cases}$$

مثال ـ جواب معادله $z^2+z+3i-1=0$ را بیابید. $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=(1)^2-4(1)(3i-1)=1-12i+4=5-12i$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{-1+\sqrt{5-12i}}{2} \\ z=\dfrac{-1-\sqrt{5-12i}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{5-12i}=\begin{cases} z_1=\sqrt{13}\ \mathrm{cis}\left(\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{-12}{5}\right)\right) \\ z_2=\sqrt{13}\ \mathrm{cis}\left(\dfrac{\mathrm{Arc}\tan\left(-\frac{12}{5}\right)+2\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$5-12i=(5,-12)\longrightarrow r=\sqrt{(5)^2+(-12)^2}=13$$

$$\longrightarrow \tan(\theta)=-\frac{12}{5}\longrightarrow \theta=\frac{\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{-12}{5}\right)+2k\pi}{2}$$

Scanned by CamScanner

Subject: ۴۶

Year. Month. Date. ( )

نکته:

$$(a^n - 1) = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + 1)$$

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

مثال - ریشه اعداد مختلط زیر را بدست آورید.

الف) $1 + z + z^2 + z^3 = 0 \rightarrow \frac{(1+z+z^2+z^3)(1-z)}{1-z} = 0$

$\frac{1-z^4}{1-z} = 0 \xrightarrow{z \neq 1} 1 - z^4 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow$

$$z = \sqrt[4]{1} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{1} \ cis(0) = 1 \quad \text{غ ق ق} \ (z \neq 1) \\ z_2 = \sqrt[4]{1} \ cis(\frac{\pi}{2}) \\ z_3 = \sqrt[4]{1} \ cis(\pi) \\ z_4 = \sqrt[4]{1} \ cis(\frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

$1 = 1 cis(0) \qquad \theta = \frac{0 + 2k\pi}{4}$

ب) $z^4 + z^2 + 1 = 0 \qquad z^2 = x \rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = -3}$

$$\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \begin{cases} z_1 = \frac{\sqrt{5}}{4} \ cis \frac{\pi}{3} \\ z_2 = \frac{\sqrt{5}}{4} \ cis \end{cases} \\ z = \sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \begin{cases} z_3 = \\ z_4 = \end{cases} \end{cases}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

نمایش هندسی اعداد مختلط :

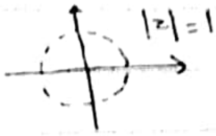
برای عدد مختلط $z=x+iy$ نمایش هندسی نقطه (x,y) در دستگاه دکارتی درنظر گرفته می‌شود.

مثال - مکان هندسی نقاطی از صفحه $\mathbb{C}$ که در معادله های زیر صدق می کنند را بیابید:

فرض $z=x+iy$ باشد آنگاه

الف) $|z|=1 \to \sqrt{x^2+y^2}=1$

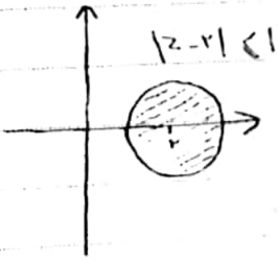
$x^2+y^2=1$



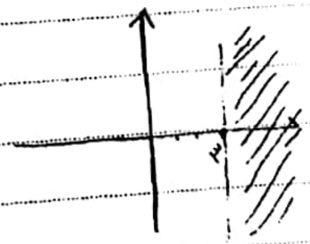
ب) $|z-2|\leq 1 \to |x+iy-2|\leq 1 \to |(x-2)+iy|\leq 1$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}\leq 1$

$\to (x-2)^2+y^2\leq (1)$ R



ج) Re(z) $z=x+iy \to x\geq 3 \to Re(z)\geq 3$



د) $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|\leq 1$

Scanned by CamScanner

نمایش نمایی یک عدد مختلط :

هرگاه $z = r\,cis(\theta)$ یک عدد مختلط باشد آنگاه از آنجایی که $e^{i\theta} = cis(\theta)$ $(\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta})$

لذا نمایش نمایی عدد مختلط عبارت است از $z = re^{i\theta}$

نکته : استفاده از نمایش نمایی بسیار محاسبات را ساده می نماید.

اثبات کنید مثال $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$z_1 = r_1\,cis(\theta_1)$

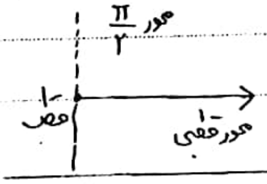
$\longrightarrow z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z_2 = r_2\,cis(\theta_2)$

$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

رسم توابع قطبی : یک تابع قطبی بصورت $r = f(\theta)$ می باشد برای رسم آن مقادیر مختلف θ را قرار داده و rهای نظیر را بدست آورده و رسم می نماییم. اما در برخی از توابع وجود تقارن شکل نسبت به محور قطبی ، قطب و محور $\frac{\pi}{2}$ (یا همان محور yها) باعث می شود که تمامی θها در تابع قرار ندهیم.



Sunwood

Scanned by CamScanner

Month........ Date........ ۳۴

(۴۷)

جلسه یازدهم

تقارن یک شکل قطبی نسبت به محور قطبی و قطب و محور $\frac{\pi}{2}$ بررسی می‌شود به طوری که اگر شکل قطبی

نسبت به محور قطبی متقارن باشد آنگاه کافی است به ازای $\pi \geq \theta \geq 0$ شکل رسم شود.

اگر شکل نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن باشد کافی است شکل به ازای $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}$ رسم شود.

و اگر شکل نسبت به قطب متقارن باشد آنگاه شکل به ازای $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}$ یا $\pi \geq \theta \geq 0$ رسم شود

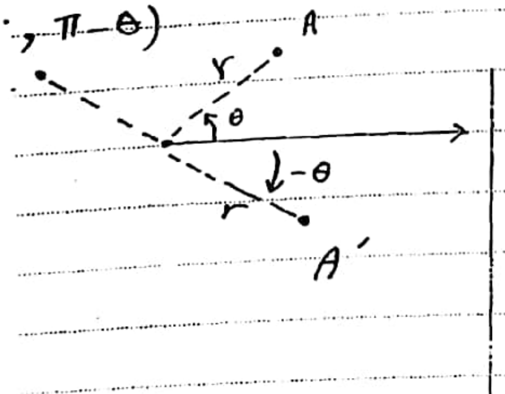
همچنین اگر ۲ تقارن به بالاتر داشته باشیم (یعنی همزمان محور قطبی و محور $\frac{\pi}{2}$ یا ....) آنگاه کافی است

شکل به ازای $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0$ رسم شود.

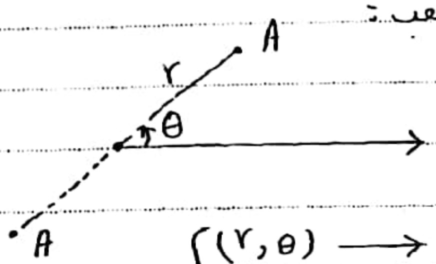
الف) تقارن نسبت به محور قطبی:

هرگاه در معادله $r = f(\theta)$، $(r, -\theta)$ یا $(-r, \pi-\theta)$ قرار دهیم و شکل معادله

به صورت قبل $(r = f(\theta))$ شود یعنی شکل نسبت به محور قطبی قرینه است



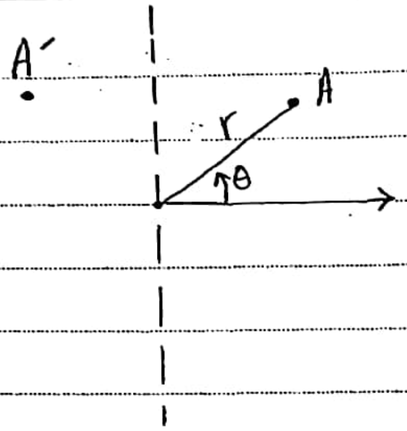
ب) تقارن نسبت به قطب:



$$\begin{cases} (r, \theta) \longrightarrow (-r, \theta) \\ \text{یا} \\ (r, \theta) \longrightarrow (r, \pi+\theta) \end{cases}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner



ج) محور $\frac{\pi}{۲}$:

$$\begin{cases}(r,\theta) \longrightarrow (r, \pi-\theta) \\ (r,\theta) \longrightarrow (-r,-\theta)\end{cases}$$

مثال - معادله $r = ۲ + ۲\cos(\theta)$ را رسم نمایید.

بررسی تقارن نسبت به محور قطبی :

$$\begin{cases}(r,\theta) \longrightarrow (r,-\theta) \\ (r,\theta) \xrightarrow{\text{یا}} (-r, \pi-\theta)\end{cases}$$

$$r = ۲+۲\cos(-\theta) = ۲+۲\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

چون شکل معادله تغییر نکرد لذا معادله نسبت به محور قطبی متقارن است.

بررسی تقارن نسبت به قطب : شکل معادله عوض شد

$$\begin{cases}(r,\theta) \longrightarrow (-r,\theta) \longrightarrow -r = ۲+۲\cos(\theta) \ \times \\ \text{یا} \\ (r,\theta) \longrightarrow (r, \pi+\theta) \longrightarrow r = ۲+۲\cos(\pi+\theta) = ۲-۲\cos(\theta) \ \times\end{cases}$$

لذا نسبت به قطب تقارن ندارد.

بررسی تقارن نسبت به محور $\frac{\pi}{۲}$:

$$\begin{cases}(r,\theta) \longrightarrow (r, \pi-\theta) \ \times \\ \text{یا} \\ (r,\theta) \longrightarrow (-r,-\theta) \ \times\end{cases}$$

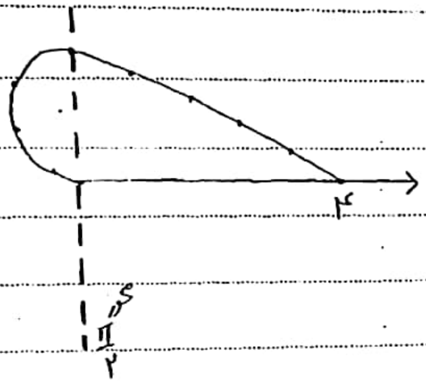
تقارن نسبت به $\frac{\pi}{۲}$ نداریم.

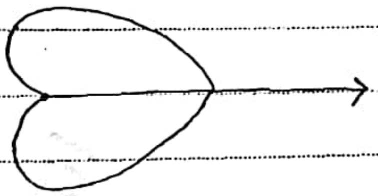
Sunwood

Scanned by CamScanner

نتیجه: کافی است شکل برای $0 \le \theta \le \pi$ رسم شود.

θ	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$r = 2 + 2\cos(\theta)$	۴	$2+\sqrt{3} \simeq 3{,}7$	$\simeq 3{,}4$	۳	۲	۰





مثال- معادله $r = 2 - 3\sin(\theta)$ را رسم نمایید.

بررسی تقارن نسبت به محور افقی:

$(r,\theta) \longrightarrow (r,-\theta)$ ... $r = 2 - 3\sin(-\theta) = 2 + \sin\theta$ ✗

$(r,\theta) \longrightarrow (-r, \pi-\theta)$

نسبت به محور افقی تقارن نداریم.

بررسی تقارن نسبت به قطب:

$(r,\theta) \longrightarrow (-r,\theta) \longrightarrow$ ✗

$(r,\theta) \longrightarrow (r, \pi+\theta) \longrightarrow$ ✗

تقارن نسبت به قطب نداریم.

بررسی تقارن نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$:

$(r,\theta) \longrightarrow (r, \pi-\theta)$ ... $r = 2 - 3\sin\underbrace{(\pi-\theta)}_{\sin\theta}$ ✓

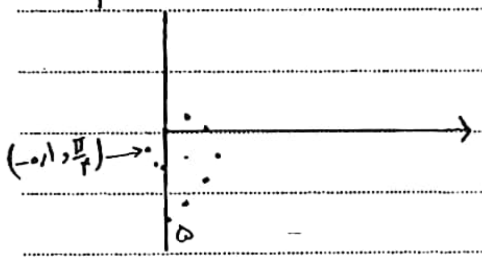
$(r,\theta) \longrightarrow (-r, -\theta)$

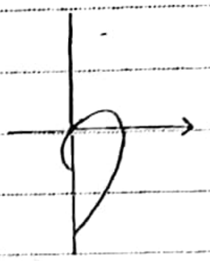
تقارن نسبت به $\frac{\pi}{2}$ داریم.

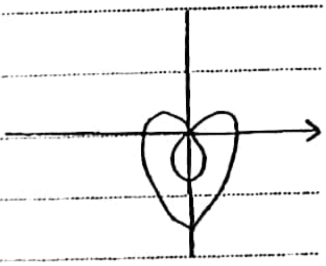
Scanned by CamScanner

نتیجه: کافی است شکل برای $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ رسم شود.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$r = 2 - 3\sin\theta$	2	$\simeq 0.5$	$\simeq -0.1$	$\simeq -0.6$	-1	3.5	4.1	4.6	5



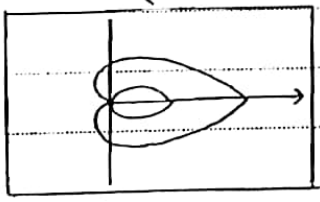




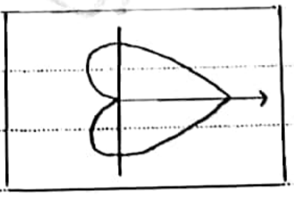
دلوارها: معادله این دسته از توابع قطبی به صورت های $r = a \pm b\sin(\theta)$ یا $r = a \pm b\cos\theta$ است به طوریکه a و b عدد حقیقی باشند.

معادله $r = a + b\cos(\theta)$

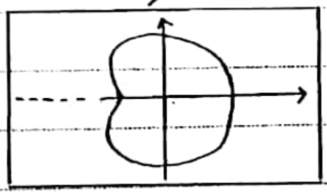
$a < b$



$a = b$

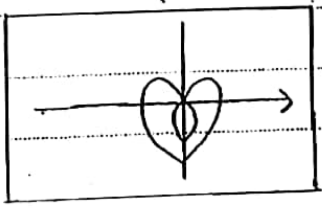


$a > b$

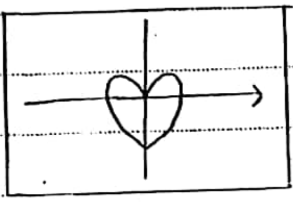


معادله $r = a - b\sin(\theta)$

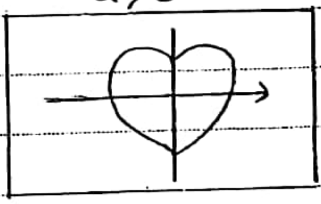
$a < b$



$a = b$



$a > b$



Scanned by CamScanner

گل پر: معادله این دسته بصورت $r = a\sin(n\theta)$ یا $r = a\cos(n\theta)$ است.

اگر n زوج باشد آنگاه حاصل یک گل با ۲n گل برگ است و اگر n فرد باشد آنگاه

حاصل یک گل با n گل برگ است.

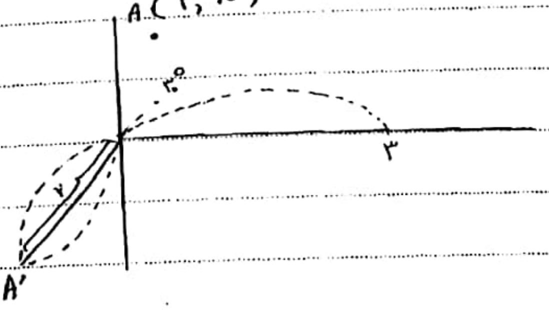
مثال ـ معادله $r = 2\cos(3\theta)$ را رسم نمایید

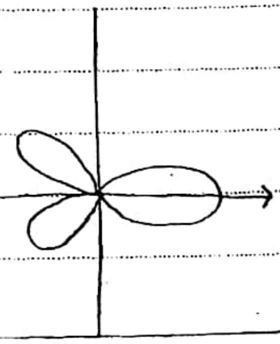
محور قطبی:
$(r, \theta) \longrightarrow (r, -\theta)$ نسبت به محور تقارن داریم ✓
$(r, \theta) \longrightarrow (-r, \pi - \theta)$

قطب:
$(r, \theta) \longrightarrow (-r, \theta) \longrightarrow$ ✗
$(r, \theta) \longrightarrow (r, \pi + \theta) \longrightarrow$ ✗

محور $\frac{\pi}{2}$:
$(r, \theta) \longrightarrow (-r, -\theta) \longrightarrow$ ✗
$(r, \theta) \longrightarrow (r, \pi - \theta) \longrightarrow$ ✗

θ	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
r	۲	۰	-۱,۴	-۲	۰	



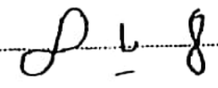


Scanned by CamScanner

Subject: ۷۳

Year.......... Month.......... Date..........( )

پروانه: معادله این دسته به صورت های $r^2 = a\sin(2\theta)$ یا $r^2 = a\cos(2\theta)$ می باشد

که نمایش آن به صورت  یا ... (پروانه) می باشد.

مثال: معادله $r^2 = \cos(2\theta)$ را رسم کنید.

تقارن نسبت به محور قطبی

$$\begin{cases} (r,\theta) \longrightarrow (r, -\theta) \ \checkmark \\ (r,\theta) \longrightarrow (-r, \pi-\theta) \end{cases}$$

تقارن نسبت به قطب ✓

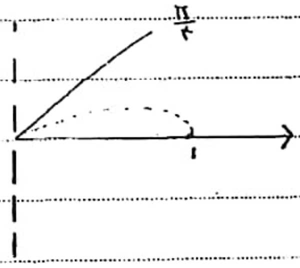
تقارن نسبت به $\frac{\pi}{2}$ ✓

① کافی است شکل برای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ رسم شود اما:

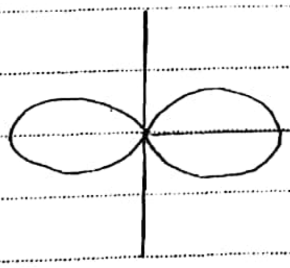
$$0 \leq r^2 \Longrightarrow \cos(2\theta) \geq 0 \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$ ②

از ① و ② کافی است شکل در $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ رسم شود.

θ	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	۱	$\simeq ۰/۷$	۰



$$r^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Sunwood

Scanned by CamScanner

۷۴

Month...... Date...... ۳۷

حدهای توانی :

هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M$ باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = (L)^M$$

مثال - $\lim_{x\to 1} (3x+1)^{x^2+2} = (4)^3 = 64$

رفع ابهام از حالت های $(0)^0$ ، $(1)^\infty$ و $(\infty)^0$:

هرگاه $\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)}$ یکی از ۳ حالت مبهم فوق گردد آنگاه بصورت زیر عمل می‌شود :

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = A$$

$$Ln(\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)}) = Ln(A)$$

اما حد از تابع پیوسته $Ln(x)$ عبور می‌کند لذا :

$$\lim_{x\to a} (Ln(f(x))^{g(x)}) = Ln A$$

$$\lim g(x)\, Ln(f(x)) = Ln A$$

$0\times\infty$

$b = Ln(A)$

$$0\times\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \overset{HoP}{=}$$

$$b = Ln(A) \Longrightarrow e^b = e^{Ln(A)} \Longrightarrow \boxed{A = e^b}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ٧٤

Year. Month. Date. ( )

* نکته:

$$*\lim \left(f(x) \right)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x) \cdot \lim f(x)}$$

مثال- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^x$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^x = (0)^0$ مبهم

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x = A$$

$$\ln\left(\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x\right) = \ln(A) \longrightarrow$$

$$\lim \ln(\sin x)^x = \ln(A) \longrightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(\sin x) = \ln(A)$$

$$0 = \ln(A)$$

$$e^0 = e^{\ln(A)} \longrightarrow \boxed{1 = A}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x = 1$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۷۸)

Month ... Date ۳۸

$$\lim_{x\to 0^+} x\,Ln(\sin x) \overset{0\times -\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{Ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$$

$$\overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2\cos(x)}{\sin x} \overset{Hop}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2x\cos(x) + x^2\sin x}{\cos(x)} = 0$$

جلسه دوازدهم

توابع هذلولی (هیپربولیک):

با کمک دو تابع e^x و e^{-x} می‌توان توابع زیر را تعریف کرد:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

به صورت قرارداد (با توجه به تشابه روابط) بین $f(x)$ و $g(x)$ با $\sin(x)$ و $\cos(x)$:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

برای توابع بیان شده داریم:

1) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ $\qquad \cosh^2(x) = (\cosh(x))^2$

2) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$

3) $\sinh(2x) = 2\sinh(x) \cdot \cosh(x)$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: (۷۷)

Year. Month. Date. ( )

همچنین تعریف کرده‌ایم:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

۴) $\tanh(x) \cdot \coth(x) = 1$

مثال: نمودار تابع $y = \cosh(x)$ را رسم نمایید.

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲}$$

$$y' = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{۲}\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{۲} \qquad \frac{۱}{۲}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$D = \mathbb{R}$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{۲} = ۰ \Rightarrow e^{x} = e^{-x} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } e^{x}} e^{۲x} = ۱$$

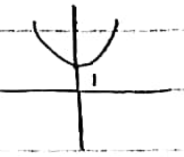
$$\ln(e^{۲x}) = \ln(۱) \rightarrow ۲x = ۰ \rightarrow x = ۰$$

x		۰	
$y' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{۲}$	−	۰	+
	↘		↗

$$\rightarrow y'' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} > ۰$$ تقعر رو به بالا

$$y(۰) = \frac{e^{۰} + e^{-۰}}{۲} = ۱ \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} = +\infty$$



تعریف:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{۱}{\cosh(x)} = \frac{۲}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{۱}{\sinh(x)} = \frac{۲}{e^{x} - e^{-x}}$$

Scanned by CamScanner

Subject: ۷۷

Year. Month. Date. ۸۹

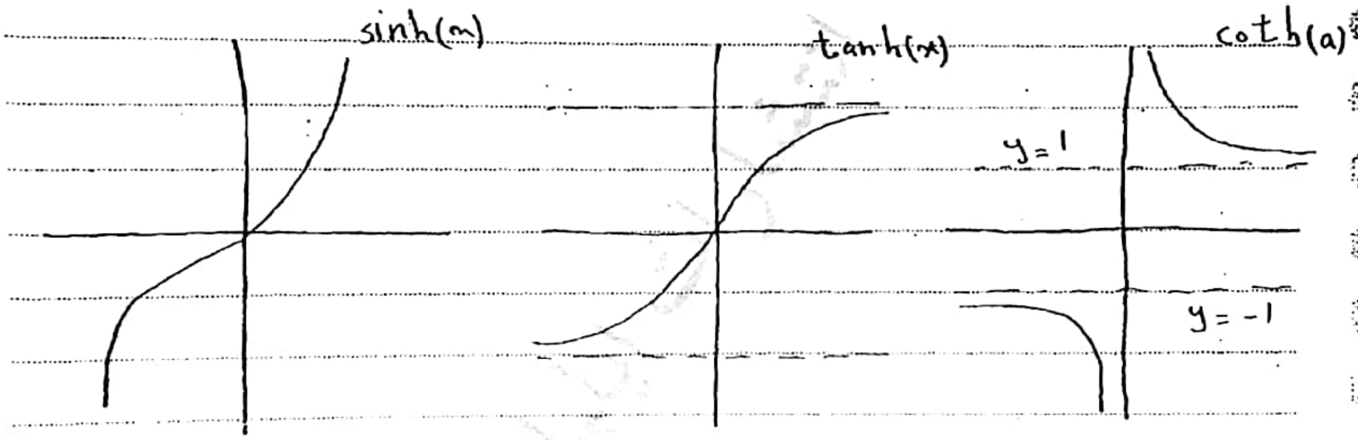
نکته :

۱) $(\sinh(x))' = \cosh(x)$

۲) $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

۳) $(\tanh(x))' = 1 + \tanh^2(x) = \sech^2(x)$

۴) $(\coth(x))' = -(1 + \coth^2(x))$



معکوس توابع هیپربولیک :

با توجه به توابع هیپربولیک این توابع دارای معکوس می باشند. و نیز $y_0 = f(x_0)$ آنگاه با فرض

مشتق پذیر بودن $f(x)$ در نقطه x_0 داریم :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال _ ثابت کنید $(Arc\tan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad \tan(x) = y \to Arc\tan(y) = x$

Sunwood $(\tan^{-1}(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow (\tan^{-1}(y))' = \frac{1}{1+y^2}$

Scanned by CamScanner

Subject: ۷۹

Year. Month. Date. ( )

مثال) مطلوب است محاسبه $(Arcsinh(x))'$

$\sinh(x)=y \to x=Arc\sinh(y)$

$$(Arc\sinh(y))'=\frac{1}{(\sinh(x))'}=\frac{1}{\cosh(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}$$

حاصل $(Arc\tanh(x))'$ را بیابید.

$\tanh(x)=y \to x=Arc\tanh(y)$

$$\to (Arc\tanh(y))'=\frac{1}{(\tanh(x))'}=\frac{1}{1+\tanh(x)^2}=\frac{1}{1+y^2}$$

نکته : معکوس توابع هیپربولیک ارتباط مستقیمی با تابع لگاریتمی دارند به طوری که :

1) $Arc\sinh(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$x\in R$

2) $Arc\cosh(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
$x\geqslant 1$

* اثبات : (مهم)

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\to y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\xrightarrow[e^x]{\text{ضرب در طرفین}}$$

$$ye^x=\frac{e^{2x}-1}{2}\to e^{2x}-2ye^x-1=0$$

$$(e^x)^2-2y(e^x)-1=0\longrightarrow\begin{cases}e^x=\frac{2y+\sqrt{4y^2+4}}{2}\\ e^x=\frac{2y-\sqrt{4y^2+4}}{2}\end{cases}$$

در نتیجه :

$$\begin{cases}\ln(e^x)=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\\ \ln(e^x)=\ln(y-\sqrt{y^2+1})\end{cases}$$ غ ق ق

$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\to Arc(\sinh(y))=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$

Sunwood
Scanned by CamScanner

ثابت کنید:

$$\text{Arc}\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^{۲} - ۱})$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} \longrightarrow y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{۲} \xrightarrow{\ xe^{x}\ }$$

$$e^{x} y = \frac{e^{۲x} + ۱}{۲} \longrightarrow ۲e^{x} y = e^{۲x} + ۱$$

$$e^{۲x} - ۲e^{x} y + ۱ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} e^{x} = \dfrac{+۲y + ۲\sqrt{y^{۲} - ۱}}{۲} \\ e^{x} = \dfrac{۲y - ۲\sqrt{y^{۲} - ۱}}{۲} \end{cases}$$

$\Delta = \sqrt{۴y^{۲} - ۴}$ ← این مقدار همیشه از ۱ کوچکتر است پس غ غ ق

$$\ln(e^{x}) = \ln(y + \sqrt{y^{۲} - ۱}) \longrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^{۲} - ۱})$$

$$\ln(e^{x}) = \ln(y - \sqrt{y^{۲} - ۱})$$

سری های عددی:

هرگاه $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد آنگاه می توان مجموع $a_۱ + a_۲ + \dots + a_n + \dots$ را به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نمایش داد. و آن را سری نامتناهی می نامیم. توجه شود که سری متناهی به صورت زیر است:

$$b_۱ + b_۲ + b_۳ + \dots + b_k = \sum_{n=۱}^{k} b_n$$

هرگاه $\alpha \in \mathbb{R}$ (عدد) باشد آنگاه:

$$۱)\ \sum_{n=۱}^{+\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=۱}^{\infty} a_n$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: .... Year: .... Month: .... Date: .... ( )

۲) $\sum_{n=1}^{K} a_n = \sum_{n=3}^{K+2} a_{n-2} = \sum_{n=0}^{K-1} a_{n+1}$

۳) $\sum_{n=1}^{K} a_n = a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{K} a_n$

تعریف: هرگاه حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک عدد معین بشود سری را همگرا و در غیر این صورت سری را واگرا می گویند.

تعریف: مجموع جزئی K ام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر است با جمع K جمله اول سری و آن را با S_K نشان می دهیم.

$S_K = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_K$

$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \qquad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

قضیه:

الف) $\lim_{K \to +\infty} S_K = S \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$ سری همگرا به S است

ب) $\lim_{K \to +\infty} S_K =$ وجود ندارد $\longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ واگرا ست

نکته: برای یافتن مقدار همگرایی عددی یک سری باید فرمول مجموع جزئی K اُم آن را (یعنی S_K) بدست آورد و سپس از آن حد گرفت.

Sugwood

Subject: (۸۱)

Year: ... Month: ... Date: ... ۹۱

مثال: نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ همگرا به عدد یک است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_k = \frac{k}{k+1} \longrightarrow \lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

قضایا و آزمون های همگرایی سری:

هدف این قسمت صرفاً بررسی همگرایی اشکال می باشد (یعنی در صورت همگرا بودن مقدار عددی همگرایی سری مهم نمی باشد) برای این منظور از چند سری شناخته شده استفاده می نماییم.

سری هندسی: اگر a یک عدد حقیقی باشد. آنگاه به سری $\sum_{n=0}^{+\infty} (A)^n$ یک سری هندسی گفته و داریم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (A)^n \begin{cases} \frac{1}{1-A} & \text{سری همگرا} \quad |A| < 1 \\ \text{سری واگرا} & |A| \geq 1 \end{cases}$$

مثال: سری $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ واگرا است اما سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگرا به ۲ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ۸۲

Year. Month. Date. ( )

سری p : به سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ یک سری p گفته می‌شود و داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{همگرا} & p > 1 \\ \text{واگرا} & p \leq 1 \end{cases}$$

مثال : (همساز) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ واگرا ، $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا

قضیه : برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ داریم :

الف) ضریب عددی نقشی در همگرایی و واگرایی سری ندارد

مثال : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5n}$ واگرا

ب) اندیس سری هم نقشی در همگرایی و واگرایی ندارد

قضیه : برای سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ داریم :

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا $\xrightarrow{\checkmark}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ $\xrightarrow{X}$ سری ممکن است همگرا یا واگرا

$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ $\xrightarrow{\checkmark}$ سری واگرا است

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ۸۳

Year ... Month ... Date ... ۴۲

جلسه سیزدهم

آزمون مقایسه:

هرگاه $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ برای دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ باشند آنگاه چنانچه $a_n \leq b_n$

باشند آنگاه:

الف) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum a_n$ همگرا است.

ب) اگر سری $\sum a_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum b_n$ واگرا است.

مثال - همگرایی و واگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+1}$ چون $\frac{1}{3n^2+1} \geq 0$ و $\frac{1}{n^2} \geq 0$

$\frac{1}{3n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ همگرا

$n^2 \leq 3n^2+1 \longrightarrow \frac{1}{3n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$

چون سری $\sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است لذا طبق آزمون مقایسه سری $\sum \frac{1}{3n^2+1}$ همگرا است

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+2}$ چون $\frac{1}{4n+1} \geq 0$ و $\frac{1}{6n} \geq 0$

$\frac{1}{6n} \leq \frac{1}{4n+2}$ واگرا $\qquad 4n+2 \leq 4n+2n = 6n$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۵۴)

Subject: ....
Year: .... Month: .... Date: .... ( )

سری $\sum \frac{1}{4n}$ واگرا است لذا طبق مقایسه سری

$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4n+2}$

$\sum \frac{1}{4n+2}$ واگرا است

$\left(\sum \frac{1}{4n} = \sum \frac{1}{4} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n} \right)$ واگرا

آزمون حدی :

هرگاه $a_n \geq 0$ و $b_n \geq 0$ در دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ باشند آنگاه قرار می دهیم

و داریم : $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

الف) اگر L عدد غیر صفر شود، آنگاه دو سری یک شکل هستند (یا هر دو همگرا یا هر دو واگرا)

ب) اگر $L = 0$ باشد آنگاه چنانچه $\sum b_n$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum a_n$ همگرا است

ج) اگر $L = \infty$ باشد آنگاه چنانچه $\sum b_n$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است

نکته : برای استفاده از آزمون حدی، سری داده شده صورت مسأله را در صورت کسر و در مخرج کسر یک سری شناخته شده قرار می دهیم. (هدف طوری باشد که جواب حد یک عدد غیر صفر و غیر بی نهایت شود.)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{صورت سوال}}{\text{مخرج: سری شناخته شده}}$

مثال : همگرایی و واگرایی سری های زیر را با آزمون حدی بررسی کنید.

الف) $\sum \frac{1}{3n^2+1}$ و چون $\frac{1}{n^2} \geq 0$ و $\frac{1}{3n^2+1} \geq 0$

Scanned by CamScanner

Subject: ۵۴

Year. Month. Date. ۴۳

چون آزمون حدی (قسمت اول) چون $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{3n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+1} = \dfrac{1}{3}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است لذا $\sum \frac{1}{3n^2+1}$ همگرا است

ب) $\sum \frac{1}{4n+2}$

چون $\frac{1}{4n+2} \geq 0$ و $\frac{1}{n} \geq 0$ است

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{4n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{4n+2} = \dfrac{1}{4}$

لذا چون $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است لذا سری $\sum \frac{1}{4n+2}$ واگرا است.

آزمون نسبت:

برای سری دلخواه $\sum a_n$ قرار داده: $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ آنگاه

الف) اگر $L<1$ باشد آنگاه سری $\sum a_n$ همگرا است.

ب) اگر $L>1$ باشد آنگاه سری $\sum a_n$ واگرا است.

ج) اگر $L=1$ آنگاه نمی‌توان مطلبی بیان داشت. (ممکن همگرا یا ممکن واگرا باشد)

مثال: همگرایی و واگرایی سری های زیر را بررسی کنید: $a_n = \frac{1}{n!} \to a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

الف) $\sum \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left| \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n!\times(n+1)} = 0$

$0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n!}$ همگرا است

Sunwood

Scanned by CamScanner

ب) $\sum \frac{1}{2^n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+2)}}{\frac{1}{2^n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}(n+2)}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ سری همگراست

ج) $\sum \frac{1}{4n+2} = \lim \left|\frac{\frac{1}{4(n+1)+2}}{\frac{1}{4n+2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n+2}{4n+6} = 1$

نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت. باید از آزمون های دیگری استفاده کرد.

د) $\sum \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e} < 1$ سری همگرا

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1)^{+\infty}$ مبهم

$(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = A \longrightarrow \ln\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \ln(A) \longrightarrow$

$\infty \times 0$

$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(A)$ * هوپیتال *

$-1 = \ln(A) \longrightarrow e^{-1} = e^{\ln(A)} \longrightarrow A = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$* \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}}$

Scanned by CamScanner

Subject: ۸۷

Year. Month. Date. ۴۴

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{n}{n+1}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+1} = -1$$

۴۴

آزمون انتگرال :

هرگاه در سری $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$ داشته باشیم تابع $f(x)$ در بازه $[K, +\infty)$ پیوسته، مثبت

و نزولی باشد آنگاه:

الف) اگر $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$ همگرا است.

ب) اگر $\int_k^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=k}^{+\infty} f(\ )$ واگرا است.

مثال - همگرایی و واگرایی سری های زیر را بررسی نمایید:

الف) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,Ln(n)} =$ تابع $f(x) = \frac{1}{x\,Ln(x)}$ در بازه $[2, +\infty)$ پیوسته، نزولی، مثبت لذا:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,Ln(x)}\,dx = \lim\left(\int_2^t \frac{1}{x\,Ln(x)}\,dx\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(Ln(Ln(x))\right]_2^t\Big) =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\overbrace{Ln(Ln(t))}^{+\infty} - Ln(Ln(2))\right) = +\infty \quad \text{واگرا}$$

چون انتگرال واگرا است لذا سری $\sum \frac{1}{n\,ln(n)}$ طبق آزمون انتگرال واگرا است

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۸۸)

Subject: .... Year: .... Month: .... Date: .... ( )

سری متناوب :

یک سری که علامات آن ، بصورت یکی در میان مثبت و منفی باشد سری متناوب گفته می‌شود . معمولاً نماد سری متناوب (علامت) $(-1)^n$ یا $\cos(n\pi)$ می‌باشد .

مثال - سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1}$ یک سری متناوب است :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{28} + \cdots$$

قضیه (آزمون متناوب) :

این قضیه صرفاً برای سری های متناوب است . هرگاه $\sum (-1)^n a_n$ یک سری متناوب باشد بطوریکه $\{a_n\}$ نزولی باشد و نیز $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ آنگاه سری متناوب همگرا است .

مثال - سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است .

سری متناوب است و $\{\frac{1}{n}\}$ نزولی و $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ لذا طبق آزمون متناوب ها سری همگرا است .

همگرایی مطلق و مشروط :

هرگاه سری $\sum a_n$ با قدر مطلق همگرا باشد آنگاه آنرا سری بطور مطلق همگرا گوییم .

$\sum |a_n|$ همگرا $\xrightarrow{\checkmark}$ $\sum a_n$ همگرا (بطور مطلق همگرا)

Scanned by CamScanner

Subject: (۸۹)

Year. ...... Month ...... Date ۴۵

همگرا

$\sum a_n$ ← همگرایی مشروط → $\sum |a_n|$ واگرا

$\sum |a_n|$ همگرا

غ.م

سری توانی: یک سری توانی حول نقطه α به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$ می باشد. به عبارت دیگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n = a_0 + a_1 (x-\alpha) + a_2 (x-\alpha)^2 + a_3 (x-\alpha)^3 + \dots$$

مثال: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1} = 1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(x-2)^3 + \frac{1}{5}(x-2)^4 + \dots$$

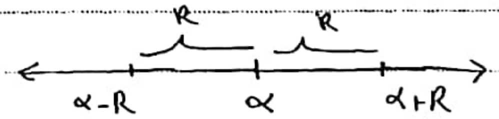
نکته: توجه شود که با قرار دادن عدد به جای x، سری عددی حاصل می شود که ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

به عنوان مثال: $x = 3 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-2)^n}{n+1} = \sum \frac{1}{n+1}$ واگرا

$x = 1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n+1} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ همگرا (متناوب)

قضیه: هرگاه سری توانی $\sum a_n (x-\alpha)^n$ موجود باشد آنگاه مقادیری از x که سری را همگرا می کنند یک فاصله (بازه) متقارن حول نقطه α می باشد که شعاع این فاصله (R) برابر است با

$$R = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$



توجه شود که برای ۲ نقطه $\alpha - R$ و $\alpha + R$ باید در سری به جای x قرار داده شود و آنگاه همگرایی یا

Sunwood

Scanned by CamScanner

...ایی حاصل بررسی شود.

مثال - فاصله و شعاع همگرایی سری زیر را بیابید:

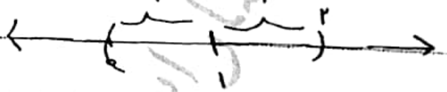
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{3n+1} \longrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3n+4}$$

$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$ سری تیلور حول نقطه ۱

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{3n+4}}{\frac{1}{3n+1}} \right| = 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$



$x = 0 \longrightarrow \sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ همگرا (متناوب)

$x = 2 \longrightarrow \sum \frac{1}{3n+1}$ واگرا

جمع بندی:

شعاع همگرایی $R = 1$

فاصله همگرایی $[0, 2)$

Scanned by CamScanner

Subject: ۹۱

Year ..... Month ..... Date ۴۶

جلسه چهاردهم

مثال ـ شعاع و بازه همگرایی سری های زیر را بیابید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3n^2+1}$

سری توانی حول نقطه $-\frac{3}{2}$ است $\left(2x+3=0 \longrightarrow x=-\frac{3}{2}\right)$

$$\sum \frac{(2x+3)^n}{3n^2+1} = \sum \frac{\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)^n}{3n^2+1} = \sum \frac{(2)^n}{3n^2+1} \overbrace{\left(x+\frac{3}{2}\right)^n}^{\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^n}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{3(n+1)^2+1}}{\frac{2^n}{3n^2+1}}\right|} = \frac{1}{2}$$

(محور اعداد با نقاط -2، $-\frac{3}{2}$، -1)

$$x=-2 \longrightarrow \sum \frac{(2)^n}{3n^2+1}\left(-2+\frac{3}{2}\right)^n = \sum \frac{(2)^n}{3n^2+1}$$ همگرا است (متناوب)

$$x=-1 \longrightarrow \sum \frac{(2)^n}{3n^2+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum \frac{1}{3n^2+1}$$ همگرا

نتیجه: $\boxed{R=\frac{1}{2}}$ شعاع همگرایی $[-2, -1]$ فاصله همگرایی

روش دوم:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(2x+3)^{n+1}}{3(n+1)^2+1}}{\frac{(2x+3)^n}{3n^2+1}}\right|<1 \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|(2x+3)\times\frac{3n^2+1}{3(n+1)^2+1}\right|$$

$$|2x+3| \times \lim\left|\frac{3n^2+1}{3(n+1)^2+1}\right|<1 \longrightarrow -1<2x+3<1 \longrightarrow -4<2x<-2$$

$$\longrightarrow -2<x<-1$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۹۲)

Subject: .... Year: .... Month: .... Date: .... ( )

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+1)^n}{n^n}$

نکته: هر وقت فاکتوریل یا توان داشتیم بهترین آزمون، آزمون نسبت است.

$|x+1| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!\,(n+1)^{n+1}} \cdot n^n \right| < 1$

$(n+1)^{n+1} = (n+1)^n \times (n+1)$

$|x+1| \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1$; $\frac{1}{e}$ *

$|x+1| \times \frac{1}{e} < 1 \rightarrow |x+1| < e$

$-e < x+1 < e \rightarrow -1-e < x < -1+e$

شعاع $R = \frac{(-1+e) - (-1-e)}{2} = e$

$x = -1-e \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(-e)^n}{n^n}$

$x = -1+e \rightarrow \sum \frac{n!}{n^n} (e^n)$

الحاق (؟) * $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1)^{\infty}$ مبهم

Sunwood

Scanned by CamScanner

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = A \longrightarrow \lim n\times \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(A)$$

$$\ln(A)$$

$$-1 = \ln(A) \longrightarrow e^{-1} = e^{\ln(A)} \longrightarrow e^{-1} = A$$

$$\lim \left(n\times \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \lim \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{Hop}{=} \quad (\infty \times 0)$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)' = \frac{1(n+1)-(1)n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{n}{n+1}}}{-\frac{1}{n^2}}$$

سری تیلور: هرگاه تابع $f(x)$ در نقطهٔ a دارای بی‌نهایت بار مشتق باشد آنگاه

سری تیلور تابع $f(x)$ در نقطهٔ a عبارت است از یک سری توانی حول نقطهٔ a بصورت زیر:

$$f(x) = f(x)\,a \text{ سری تیلور در نقطهٔ } = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

مثال: سری تیلور تابع $f(x)=\cos x$ را در نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ بنویسید.

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + (\cos(x))'_{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(\cos)''(\frac{\pi}{2})}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 +$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۹۶

Subject: ____ Year: ____ Month: ____ Date: ____ ( )

$$\frac{(\cos(x))'''(\frac{\pi}{2})}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\cdots$$

$$f(x)=\cos(x) \longrightarrow f(\tfrac{\pi}{2})=\cos(\tfrac{\pi}{2})=0$$

$$f'(\tfrac{\pi}{2})=(\cos(x))'\Big|_{\frac{\pi}{2}}=-1$$

$$f''(\tfrac{\pi}{2})=0$$

$$f'''(\tfrac{\pi}{2})=1$$

$$f^{(4)}(\tfrac{\pi}{2})=0$$

$$f^{(5)}(\tfrac{\pi}{2})=-1$$

$$\cos(x)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\frac{1}{7!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7-\frac{1}{9!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^9+\cdots \longrightarrow$$

$$=\sum_{n=0}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

سری مک لورن: به سری تیلور در نقطه صفر (حول نقطه صفر) سری مک لورن گفته می‌شود.

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

(۹۵)

Subject:

Year. Month. Date. ۲۸

مثال: ثابت کنید

الف) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \rightarrow f''(x) = e^x \ \dots \ f^{(n)}(x) = e^x$

$\rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

ب) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

$f(x) = \cos(x) \rightarrow f(0) = 1$

$f'(0) = -\sin(0) = 0 \rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(0) = 0 \rightarrow f^{(4)}(0) = 1$

$\cos(x) = 1 + \frac{0}{1!} x + \frac{-1}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots =$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

ب ۳
۹۰٪ س ۱۰

* نکته: مشتق و انتگرال گیری از یک سری:

برای x های موجود در یک فاصله همگرایی یک سری توانی، می توان جمله به جمله از آن

انتگرال و یا مشتق گرفت.

Sunwood

الف) $\int_{\alpha}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-\alpha)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\alpha}^{x} a_n (t-\alpha)^n dt\right) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (t-\alpha)^{n+1}}{n+1}\Bigg]_{\alpha}^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

ب) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x-\alpha)^n\right)' =$

$$\sum a_n n (x-\alpha)^{n-1}$$

مثال - سری مک لورن (توانی) نظیر توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x) = x^2 e^{3x}$	ب) $g(x) = Arctan(x)$ ج) $h(x) = 2x^2 Arctan(x)$ د) $k(x) = Ln(1+x)$ ه) $m(x) = \frac{-2x^3}{(1+x^2)^2}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow$$

$$e^{3x} = \sum \frac{(3x)^n}{n!} = \sum \frac{3^n}{n!} x^n$$

$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^2} x^2 (e^{3x}) = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n\right)$

$$x^2 e^{3x} = \sum \frac{3^n}{n!} x^{n+2}$$

Scanned by CamScanner

(۹۸)

Subject: Year. Month. Date. ۴۹

ب) $y(x) = \operatorname{Arc\,tan}(x)$

$$\text{تابع داده شده مسأله} = \left(\text{تابع سرا کرده}\right)'$$

$$\text{تابع داده شده مسأله} = \int \text{تابع سرا کرده}$$

$$\frac{1}{1-A} = \Sigma (A)^n$$ تابع سرا شده باید سری توانی آنرا بدلبا باشیم.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \Sigma (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \xrightarrow{\text{از دوطرف انتگرال}}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \left(\Sigma (-1)^n t^{2n}\right) dt \longrightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{Arc\,tan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{2n+1}}$$

ج) $h(x) = 2x^2 \operatorname{Arc\,tan}(x)$

$$2x^2(\operatorname{Arctan} x) = 2x^2\left(\Sigma \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}\right)$$

$$, 2x^2 \operatorname{Arc\,tan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1} x^{2n+3}$$

د) $K(x) = \operatorname{Ln}(1+x)$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \xrightarrow{\text{از دوطرف انتگرال}}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x)^{n+1}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

۹۸

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ه) $\dfrac{-2x^3}{(1+x^2)^2}$

$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{1-A} = \Sigma (A)^n$ سری هندسی است

$\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n}_{(-1)^n x^{2n}}\right)' \longrightarrow \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 2n \, x^{2n-1}$

$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^2} \dfrac{-2x^3}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n+1}$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: ۶۹
Year. Month. Date. مولی

* نمونه سوال امتحانی *

جواب معادله $z^۲+z+۳i-۱=۰$ را بیابید: (a, b, c)

$$\begin{cases} z=\dfrac{-۱+\sqrt{۱-۴(۳i-۱)}}{۲} \\ z=\dfrac{-۱-\sqrt{}}{۲} \end{cases}$$

$\sqrt{۵-۱۲i}=\begin{cases} z_۱=\ ? \\ z_۲=\ ? \end{cases}$ یکی از این ریشه ها جزوش دارای دو ریشه است.

$$\begin{cases} r=\sqrt{(۵)^۲+(۱۲)^۲} \\ \tan(\theta)=\dfrac{-۱۲}{۵}\longrightarrow\theta=\operatorname{Arc}\tan\left(-\dfrac{۱۲}{۵}\right) \end{cases}$$

$۵-۱۲i=(\sqrt{۱۶۹})\ \operatorname{cis}\ \operatorname{Arc}\tan\left(-\dfrac{۱۲}{۵}\right)$ ، $\sqrt{۱۶۹}=۱۳$

حدود زیر را بیابید:

الف) $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^۲}\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)+۲\sin\left(\dfrac{۲}{n}\right)+۳\sin\left(\dfrac{۳}{n}\right)+\cdots+n\sin(۱)\right)=$

$$=\int_۰^۱ x\sin x\,dx$$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\left(\tan\left(\dfrac{x}{۲}\right)-۱\right)^{\cos x}$ مبهم $(۰)^۰$

رفع ابهام می‌کنیم. مانند سری ... و سپس $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ مرتب را دو بار محاسبه کردیم.

سری مبهم و رفع ابهام

Sunwood

Scanned by CamScanner

نکته:

$$\log_b a = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

مثال: $(\log_2(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)' = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{x}$

نکته: $a^b = e^{b \ln a}$

اثبات: $e^{b \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$

مثال: $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \times (x \ln x)' =$

$x^x \times (\ln(x) + 1)$

مثال: $\int \log_3(x)^{\ln(3)} \, dx = \int \ln 3 \, \log_3(x) \, dx =$

$\int \ln 3 \, \frac{\ln x}{\ln 3} \, dx$

ب) $\int \frac{x^2 + 10}{-x^3 + x^2 - 2x + 2} \, dx =$ ریشه: $x = 1$ بر $x-1$ تقسیم بر $x-1$

$$\begin{array}{l|l} -x^3 + x^2 - 2x + 2 & x - 1 \\ \hline \vdots & -x^2 - 2 \\ 0 & \end{array}$$

Sunwood

Scanned by CamScanner

Subject: (۱۰۲)

Year........ Month........ Date........ الف

$-x^3+x^2-2x+2=(x-1)(-x^2-2)$

$\frac{x^2+10}{x^3+x^2-2x+2} = \frac{Ax}{x-1}+\frac{Bx+C}{-x^2-2}$

$x^2+10 = A(-x^2-2)+(x-1)(B+Cx)$

$x=1 \longrightarrow 11=3A \longrightarrow A=-\frac{11}{3}$

دلخواه $x=0 \longrightarrow 10=\frac{22}{3}-B \longrightarrow B=-\frac{8}{3}$

دلخواه: $x=-1 \longrightarrow 11=11-2\left(-\frac{8}{3}-C\right) \Longrightarrow C=\frac{8}{3}$

می‌گذاریم

$\int \frac{x^2+10}{-x^3+x^2-2x+2}dx = -\frac{11}{3}\ln(x-1)+\int \frac{+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}x}{+x^2+2}dx$

ج) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}}dx =$

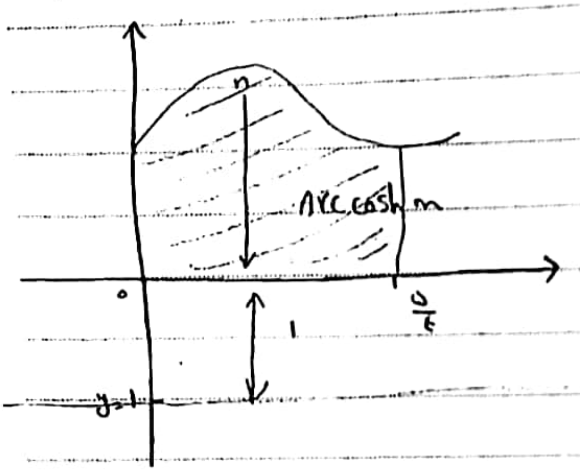
Sunwood

Scanned by CamScanner

(۱۰۳)

Subject: ____ Year. ____ Month. ____ Date. ____ ( )

حجم دوار منحنی $y = \text{Arccosh}(x)$ و محورها از $x=0$ تا $x = \frac{5}{4}$ حول خط $y=-1$ را بیابید.



$$V = \pi \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{(1 + \text{Arccosh}(x))^2 - (1)^2 \, dx}{\text{Arccosh}^2(x) + 2\,\text{Arccosh}\,x}$$

$$\int \text{Arccosh}(x)\,dx = \int \underbrace{u}_{v} \underbrace{\sinh(x)\,du}_{dz} =$$

$$\begin{cases} x = \cosh(u) \rightarrow u = \text{Arccosh}(x) \\ dx = \sinh(u)\,du \end{cases} \qquad \begin{cases} u = v \\ \sinh u\,du = dz \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = dz \\ \cosh u = z \end{cases}$$

$$= u\cosh(u) - \sinh(u)$$

$$= \text{Arccosh}(x) \times x - \sinh(\text{Arccosh}\,x)$$

شعاع و فاصله همگرایی $\sum \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Sunwood

Scanned by CamScanner